修士論文

論文題目

質量分析計の特性評価のための
高次近似イオン軌道計算法

平成8年2月7日

専攻名 物理学

氏　名 林原 寛典

大阪大学大学院理学研究科

目次

第1章　はじめに

質量分析法は物質をイオン化し，生成されたイオンをその質量に応じて分離をし，分離されたイオンを検出するという過程を経て得られたデータをもとに分析を行う手法である。つまり質量分析はイオン化，質量分離，検出という3つの柱からなっている。このうち，質量分離はイオン源で作られたイオンを電磁気的な力，具体的にはイオンが電場や磁場の中を通るときに受ける力を利用することによって質量ごとに分ける，あるいは望みの質量を持ったイオンだけを取り出すという質量分析の中核を成すものである。

最近のイオン化の技術の向上により高質量の物質や微量の生体関連物質が質量分析法で扱えるようになったため，医学，生理学など広範な分野において活用されている。したがって質量分離の過程でも高透過性，高分解能，高感度といったより高い性能が要求される。

質量分離を行う装置として磁場型，飛行時間型(time of flight)，Qマスフィルター，フーリエ変換サイクロトロン共鳴型装置などがある。このうち最も主要に使われているのは磁場型の装置である。この方法は扇型(sector)の磁場の強さを掃引することにより検出器に到達できるイオンの質量が変化することを利用した方法である。今回の論文では磁場型の質量分析計に関する問題を取りあげることにする。

質量分離の方法が発展していくうえで要になっているのは電磁場中のイオン軌道の計算法の開発であることはいうまでもない。磁場型の質量分析計の発展の歴史をごく簡単にふりかえる。まず半円形(180度)の磁場を利用した質量分析が1918年，Dempsterによって報告された。その後，小型化や方向収束などを実現するためにさまざまな試みがなされ，60度(1940年，Nier)，90度(1960年，Davis and Vanderslice)の磁場を使った質量分析計が報告された。一方，方向収束とともにエネルギー収束も可能な磁場と電場を使った二重収束質量分析器がMattauchとHerzogによって開発された(1934年)。これ以後磁場と電場の組み合わせの改良などが行われ，質量分離の性能は向上し，高質量域も測定対象となった。

このような性能向上を支えてきたのは質量分析計に対するイオン光学的な特性評価(分解能，透過性，感度)である。評価するのに重要なのは質量分析計がどれだけイオンを収束できるかおよび収差をもたらすのかということを知ることである。収束性や収差を求めるのにもっとも有効であると考えられるのはイオン光学系のパラメータの値を元にしてイオンの軌道を計算することである。

初期の計算は幾何光学をもとに方向の広がったイオンビームの収束という概念を入れずに電場と磁場を組み合わせただけであった。しかし近似の精度を上げるため努力された。その結果磁場と電場それぞれに2次の計算がなされた。ついで水平方向(扇の半径方向)のイオン軌道の収差を補正するため3次の計算がなされた[1-3]。また重畳場の計算をするために磁場と電場をあわせて計算する方法が考案され2次[4]，3次の計算が行われた。1976年には軌道計算を行うコンピュータプログラムTRIO (Third Order Ion Optics)が松尾らによって開発された[5]。

しかしイオン光学系の性能に与える影響が水平方向に比べて小さいことから垂直方向の計算は2次近似までであった。だが高感度分析をするには垂直方向の収束性を満足させる必要がある。したがって垂直方向についてもより細かい評価をするために高次の計算が要求される。

そこで今回は，このような要求を満たすため垂直方向についても3次近似までの計算をしたので[6]第2章で述べる。

一方，前述したDempsterの半円型のイオン光学系の場合を除き，イオンは必ず場の端の領域を通る。しかし第2章の計算はあるところで急に電場や磁場が現れるものとして計算したものである(理想場)。しかし実際には場のない領域とある領域の間に連続的に場の大きさが変化していく領域(端縁場)が存在する。現実の場でイオン軌道の計算をし，イオン光学系の特性を評価するためには端縁場の影響は無視できない。このため磁場や電場における端縁場の影響の計算を2次近似でWollnikらによって，さらに3次近似で松田らによってなされた[7-9]。また重畳場の端縁場については2次近似で仲伏らによって行われている[10]。

そこで今回は重畳場を含んだイオン光学系の計算ができるように第3章

で重畳場の端縁場の2次近似計算を[10]とは異なる方法で求める。

最後に第4章で簡単なイオン光学系の実例にもとづく計算を行い，結果を検討する。

第2章　重畳場中の荷電粒子の軌道計算

2-1　座標系

まず標準となる荷電粒子について考える。この粒子の質量，電荷，運動エネルギーはそれぞれ m_0，e_0，U_0とし，考える場の中で曲率半径ρ_0の軌道を描くとする。この軌道を中心軌道と呼ぶことにする。中心軌道の形状は場の無い空間(自由空間)では直線(この場合は$\rho_0=\infty$となる特別なケースである)，電場や磁場中では円弧である。

任意の荷電粒子の軌道は中心軌道にくらべて大きくは違っていないと仮定し，中心軌道との差として計算をする。図2-1のように中心軌道に沿ってz軸を取り，水平方向と垂直方向にそれぞれx軸，y軸をとる。

すると任意軌道はzを中心軌道上のある地点とすると$x(z)$，$y(z)$で表される。またこの荷電粒子の運動方向の角度を図2-2で定義される$\alpha(z)$，$\beta(z)$で表す。このときxとα，yとβの関係は次のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\left(1+\frac{x}{\rho_0}\right)\tan\alpha,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\left(1+\frac{x}{\rho_0}\right)\tan\beta \qquad (2\text{-}1)$$

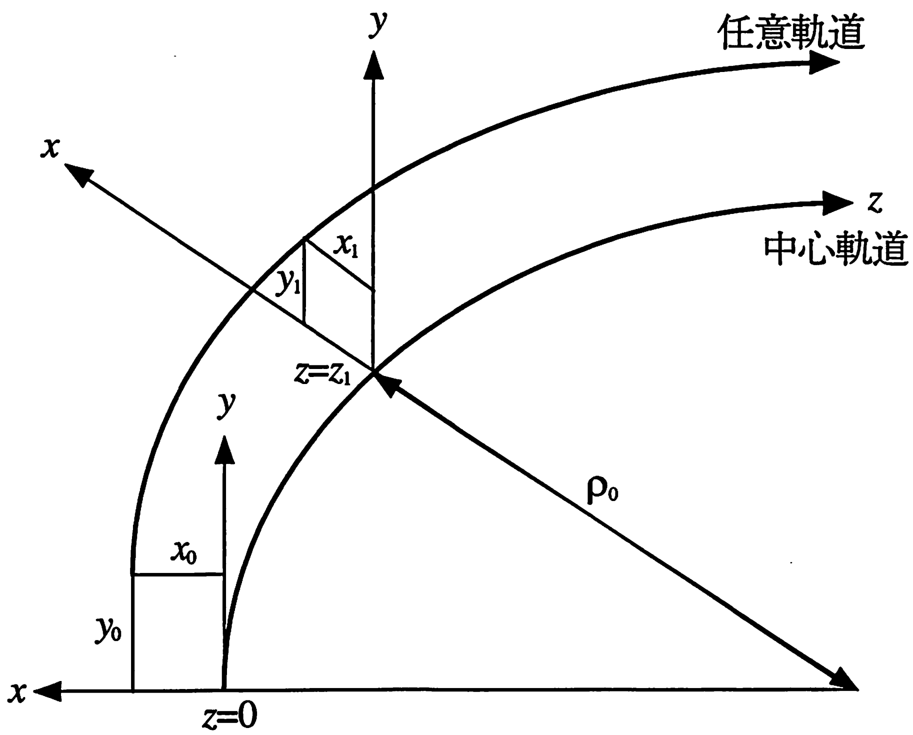


図2-1：曲線座標系

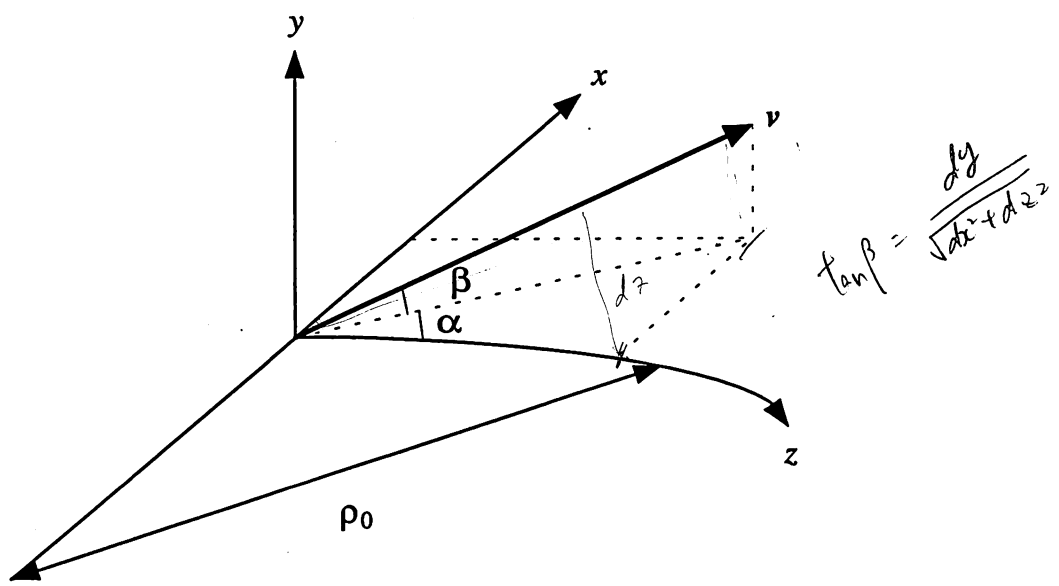


図2-2：角度の定義（vは速度）

2-2 電磁場の表現

電場，磁場の大きさはともに中心面(x-z面)に関して対称で中心軌道方向(z)には依存しないと仮定する。このとき中心面での電場，磁場の成分は次のように定義することができる。

$$
\begin{aligned}
E_x(x,0) &= E_0\left(\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2+\lambda_3 x^3+\cdots\right)\\
B_y(x,0) &= B_0\left(\mu_0+\mu_1 x+\mu_2 x^2+\mu_3 x^3+\cdots\right)
\end{aligned}
\tag{2-2}
$$

λ_iやμ_iはそれぞれ電場，磁場の形状に依存する値，E_0，B_0は定数である。図2-3のような場に対してλ_i，μ_iは表2-1の値を取る。

$\boldsymbol{E}(x, y)$，$\boldsymbol{B}(x, y)$に対応するスカラーポテンシャル$\phi(x, y)$，ベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}(x, y)$の各成分を次のように仮定する。(yの奇数次の項は対称性により0となる)

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y) &= -E_0\sum_{i,j}\frac{a_{i,2j}}{i!(2j)!}x^i y^{2j} = -E_0\left(a_{0,0}+a_{1,0}x+\tfrac{1}{2}a_{2,0}x^2+\tfrac{1}{2}a_{0,2}y^2+\cdots\right)\\
A_z(x,y) &= -B_0\sum_{i,j}\frac{b_{i,2j}}{i!(2j)!}x^i y^{2j} = -B_0\left(b_{0,0}+b_{1,0}x+\tfrac{1}{2}b_{2,0}x^2+\tfrac{1}{2}b_{0,2}y^2+\cdots\right)\\
A_x(y,z) &= 0,\ A_y(x,z)=0
\end{aligned}
\tag{2-3}
$$

電荷が存在しないときのMaxwellの方程式が満たすべき条件

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{E}(x,y) &= \left(\frac{1}{1+x/\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(1+x/\rho_0)E_x\right\},\ \frac{\partial E_y}{\partial y},\ 0\right)=0\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{B}(x,y) &= \left(-\frac{1}{1+x/\rho_0}\frac{\partial B_y}{\partial z},\ \frac{1}{1+x/\rho_0}\frac{\partial B_x}{\partial z},\ \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}
\tag{2-4}
$$

および場とポテンシャルの間の関係式

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(x,y) &= -\operatorname{grad}\phi(x,y) = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x},\ -\frac{\partial\phi}{\partial y},\ 0\right)\\
\boldsymbol{B}(x,y) &= \operatorname{rot}\boldsymbol{A}(x,y) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y},\ -\frac{1}{1+x/\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(1+x/\rho_0)A_z\right\},\ 0\right)
\end{aligned}
\tag{2-5}
$$

からλ_i，μ_iと$a_{i,2j}$，$b_{i,2j}$の間の関係式を導き，スカラーポテンシャルϕ，ベク

トルポテンシャル$\boldsymbol{A}$を求めると4次までの近似でつぎのようになる。($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$を3次まで求めるため)

$$\begin{aligned}\phi(x,y)=-E_0\Big\{&\lambda_0 x+\tfrac{1}{2}\lambda_1 x^2-\tfrac{1}{2}(\lambda_1+h_0\lambda_0)y^2+\tfrac{1}{3}\lambda_2 x^3\\&-\tfrac{1}{2}(2\lambda_2+h_0\lambda_1-h_0^2\lambda_0)xy^2+\tfrac{1}{4}\lambda_3 x^4-\tfrac{1}{2}(3\lambda_3+h_0\lambda_2-h_0^2\lambda_1+h_0^3\lambda_0)x^2y^2\\&+\tfrac{1}{24}(6\lambda_3+4h_0\lambda_2-h_0^2\lambda_1+h_0^3\lambda_0)y^4\Big\}\end{aligned}\tag{2-6}$$

$$A_x(y,z)=0,\ A_y(x,z)=0$$

$$\begin{aligned}A_z(x,y)=-B_0\Big\{&\mu_0 x+\tfrac{1}{2}(\mu_1-h_0\mu_0)x^2-\tfrac{1}{2}\mu_1 y^2+\tfrac{1}{6}(2\mu_2-h_0\mu_1+3h_0^2\mu_0)x^3\\&-\mu_2 xy^2+\tfrac{1}{12}(3\mu_3-h_0\mu_2+2h_0^2\mu_1-6h_0^3\mu_0)x^4-\tfrac{3}{2}\mu_3 x^2y^2\\&+\tfrac{1}{24}(6\mu_3+2h_0\mu_2-h_0^2\mu_1)y^4\Big\}\end{aligned}\tag{2-7}$$

ただし $h_0=1/\rho_0$ である。以下の式ではρ_0の代わりにh_0を主に用いることにする。

電場，磁場は(2-6)，(2-7)を代入することによって

$$E_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x},\ E_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y},\ B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y},\ B_y=-\frac{1}{1+h_0x}\frac{\partial}{\partial x}\{(1+h_0x)A_z\}\tag{2-8}$$

と求められる。

表2-1：λ_i，μ_iの例
（c_1，c_2，c_3はいずれもトロイダル電場の特徴を表す定数）

	円筒電場	トロイダル電場	均一磁場	トロイダル電場 ＋均一磁場
λ_0	1	1	0	1
λ_1	$-1/\rho_0$	$-(1+c_1)/\rho_0$	0	$-(1+c_1)/\rho_0$
λ_2	$1/\rho_0^2$	$\left(1+c_1+\frac{1}{2}c_1^2-\frac{1}{2}c_2\right)/\rho_0^2$	0	$\left(1+c_1+\frac{1}{2}c_1^2-\frac{1}{2}c_2\right)/\rho_0^2$
λ_3	$-1/\rho_0^3$	$-\{6(1+c_1)+c_1^2(3+c_1)$ $-3c_2(1+c_1)+c_3\}/(6\rho_0^3)$	0	$-\{6(1+c_1)+c_1^2(3+c_1)$ $-3c_2(1+c_1)+c_3\}/(6\rho_0^3)$
μ_0	0	0	1	1
μ_1	0	0	0	0
μ_2	0	0	0	0
μ_3	0	0	0	0

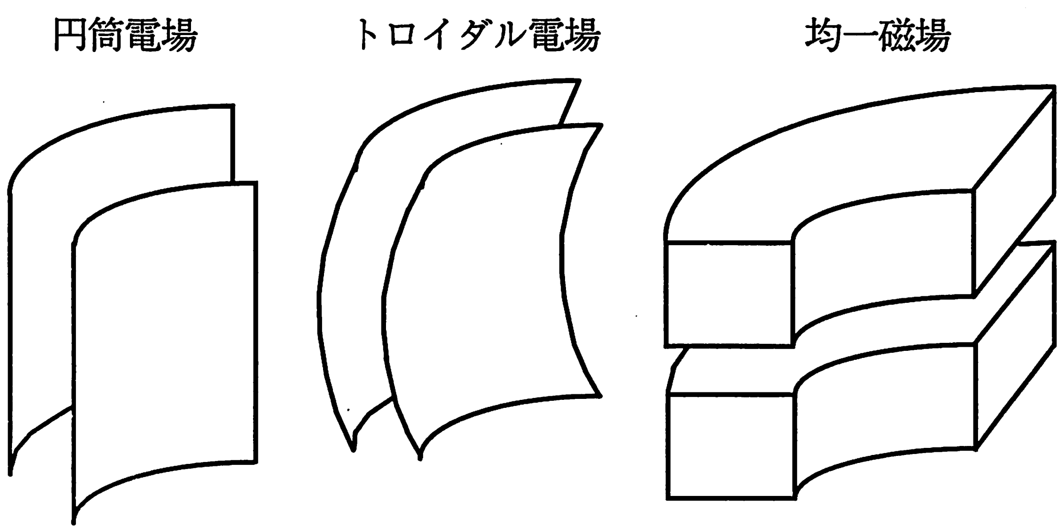


図2-3：さまざまな場

2-3　運動方程式の導出

任意の荷電粒子の質量，電荷，$\phi=0$の場所での運動エネルギーをそれぞれm，e，Uとすると相対論的な影響を考慮したエネルギー保存則は次のように表される。

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}+e\phi(x,y)=mc^2+U \tag{2-9}$$

この式から運動量pを求めると

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\sqrt{\frac{U(U+2mc^2)}{c^2}}\sqrt{\left(1-\frac{e\phi}{U+2mc^2}\right)\left(1-\frac{e\phi}{U}\right)} \tag{2-10}$$

光学で光の道筋を求めるのに使われるフェルマーの変分原理

$$\delta\int n\,\mathrm{d}s=0 \tag{2-11}$$

(ただしnは屈折率，$\mathrm{d}s$は進路方向の線要素)
をイオン光学に適用する。

$$n=p+e\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t},\ \mathrm{d}s=\sqrt{x'^2+y'^2+(1+h_0x)}\,\mathrm{d}z \tag{2-12}$$

(ただし$\boldsymbol{t}$は進路方向に沿った単位ベクトル，$x'=\mathrm{d}x/\mathrm{d}z$，$y'=\mathrm{d}y/\mathrm{d}z$)と(2-10)を(2-11)に代入すると次のように表される。

$$\delta\int F\,\mathrm{d}z=0 \tag{2-13}$$

ただし

$$F(x,y,x',y')=\sqrt{\left(1-\frac{e\phi}{U+2mc^2}\right)\left(1-\frac{e\phi}{U}\right)}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+(1+h_0x)^2}+\sqrt{\frac{c^2}{U(U+2mc^2)}}\cdot eA_z(1+h_0x) \tag{2-14}$$

変分則(2-13)をオイラー・ラグランジュ方程式で書き表すと

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)-\frac{\partial F}{\partial x}=0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{2-15}$$

この解を3次近似で求めるためにはFは4次まで計算する必要がある。
(2-6)，(2-7)を(2-14)に代入すると次のようにまとめられる。

$$
\begin{aligned}
F = & F_0 + F_x x + F_{xx}x^2 + F_{yy}y^2 + F_{x'x'}x'^2 + F_{y'y'}y'^2 + F_{xxx}x^3 + F_{xyy}xy^2 + F_{xx'x'}xx'^2 \\
& + F_{xy'y'}xy'^2 + F_{xxxx}x^4 + F_{xxyy}x^2y^2 + F_{xxx'x'}x^2x'^2 + F_{xxy'y'}x^2y'^2 + F_{yyyy}y^4 \\
& + F_{yyx'x'}y^2x'^2 + F_{yyy'y'}y^2y'^2 + F_{x'x'x'x'}x'^4 + F_{x'x'y'y'}x'^2y'^2 + F_{y'y'y'y'}y'^4
\end{aligned} \tag{2-16}
$$

Fの各係数は次のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
& F_0 = 1,\ F_x = h_0 - \lambda_0 N - \mu_0 M \\
& F_{xx} = -\tfrac{1}{2}\left\{(\lambda_1 + 2h_0\lambda_0)N + \lambda_0^2N^2/\varepsilon^2 + (\mu_1 + h_0\mu_0)M\right\} \\
& F_{yy} = \tfrac{1}{2}\left\{(\lambda_1 + h_0\lambda_0)N + \mu_1 M\right\},\ F_{x'x'} = \tfrac{1}{2},\ F_{y'y'} = \tfrac{1}{2} \\
& F_{xxx} = -\left\{(\tfrac{1}{3}\lambda_2 + \tfrac{1}{2}h_0\lambda_1)N + \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + h_0\lambda_0)\lambda_0N^2/\varepsilon^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_0^3N^3/\varepsilon^2 + \tfrac{1}{3}(\mu_2 + h_0\mu_1)M\right\} \\
& F_{xyy} = \left\{(\lambda_2 + h_0\lambda_1)N + \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + h_0\lambda_0)\lambda_0N^2/\varepsilon^2 + (\mu_2 + \tfrac{1}{2}h_0\mu_1)M\right\} \\
& F_{xx'x'} = -\tfrac{1}{2}(\lambda_0 N + h_0),\ F_{xy'y'} = -\tfrac{1}{2}(\lambda_0 N + h_0) \\
& \\
& F_{xxxx} = -\Big[(\tfrac{1}{4}\lambda_3 + \tfrac{1}{3}h_0\lambda_2)N + \tfrac{1}{2}\Big\{(\tfrac{2}{3}\lambda_2 + h_0\lambda_1)\lambda_0N^2 + \tfrac{1}{4}\lambda_1^2N^2 + (\tfrac{3}{2}\lambda_1 + h_0\lambda_0)\lambda_0^2N^3 \\
& \qquad + \lambda_0^4N^4\Big\}/\varepsilon^2 + \tfrac{1}{8}\lambda_0^4N^4/\varepsilon^4 + \tfrac{1}{4}(\mu_3 + h_0\mu_2)M\Big] \\
& F_{xxyy} = \tfrac{1}{2}\Big[3(\lambda_3 + h_0\lambda_2)N + \tfrac{1}{2}\Big\{(4\lambda_2 + 5\lambda_1)\lambda_0N^2 + \lambda_1^2N^2 + 3(\lambda_1 + h_0\lambda_0)\lambda_0^2N^3\Big\}/\varepsilon^2 \\
& \qquad + (3\mu_3 + 2h_0\mu_2)M\Big] \\
& F_{xxx'x'} = \tfrac{1}{2}\left\{h_0^2 - (\tfrac{1}{2}\lambda_1 - h_0\lambda_0)N - \tfrac{1}{2}\lambda_0^2N^2/\varepsilon^2\right\} \\
& F_{xxy'y'} = \tfrac{1}{2}\left\{h_0^2 - (\tfrac{1}{2}\lambda_1 - h_0\lambda_0)N - \tfrac{1}{2}\lambda_0^2N^2/\varepsilon^2\right\} \\
& \\
& F_{yyyy} = \tfrac{1}{4}\Big[-(\lambda_3 + \tfrac{2}{3}h_0\lambda_2 - \tfrac{1}{6}h_0^2\lambda_1 + \tfrac{1}{6}h_0^3\lambda_0)N - \tfrac{1}{2}(\lambda_1^2 + 2h_0\lambda_1\lambda_0 + h_0^2\lambda_0^2)N^2/\varepsilon^2 \\
& \qquad - (\mu_3 + \tfrac{1}{3}h_0\mu_2 - \tfrac{1}{6}h_0^2\mu_1)M\Big] \\
& F_{yyx'x'} = \tfrac{1}{4}(\lambda_1 + h_0\lambda_0)N,\ F_{yyy'y'} = \tfrac{1}{4}(\lambda_1 + h_0\lambda_0)N \\
& F_{x'x'x'x'} = -\tfrac{1}{8},\ F_{x'x'y'y'} = -\tfrac{1}{4},\ F_{y'y'y'y'} = -\tfrac{1}{8}
\end{aligned} \tag{2-17}
$$

ここで

$$
\varepsilon = 1 + \frac{U}{mc^2},\ N = -\frac{eE_0}{U}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1},\ M = \frac{eB_0}{\sqrt{mU}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon+1}} \tag{2-18}
$$

である。

(2-16)を(2-15)に代入すると運動方程式は次のように表せる。

$$
\begin{aligned}
x''-2F_{xx}x=&F_x+3F_{xxx}x^2+F_{xyy}y^2-F_{xx'x'}\left(x'^2+2xx''\right)+F_{xy'y'}y'^2+4F_{xxxx}x^3\\
&+2F_{xxyy}xy^2-2F_{xxx'x'}\left(x^2x''+xx'^2\right)+2F_{xxy'y'}xy'^2-12F_{x'x'x'x'}x'^2x''\\
&-2F_{yyx'x'}\left(y^2x''+2x'y'\right)-2F_{x'x'y'y'}\left(2x'y'y''+y'^2x''\right)
\end{aligned}
\tag{2-19}
$$

$$
\begin{aligned}
y''-2F_{yy}y=&2F_{xyy}xy-2F_{xy'y'}(x'y'+xy'')+2F_{xxyy}x^2y+4F_{yyyy}y^3\\
&-2F_{xxy'y'}\left(x^2y''+2xx'y'\right)+2F_{yyx'x'}yx'^2-2F_{yyy'y'}\left(yy'^2+y^2y''\right)\\
&-2F_{x'x'y'y'}\left(2x'y'x''+x'^2y''\right)-12F_{y'y'y'y'}y'^2y''
\end{aligned}
\tag{2-20}
$$

任意の粒子に関してこれらの方程式を解くために

$$
\frac{m}{e}=\frac{m_0}{e_0}(1+\gamma),\ \frac{U}{e}=\frac{U_0}{e_0}(1+\delta)
\tag{2-21}
$$

と定義される微小量γ, δを導入する。γ, δはそれぞれ中心軌道を通る粒子に対する質量，運動エネルギーの差である。

これを(2-18)に代入すると3次近似で

$$
\varepsilon=\varepsilon_0+(\varepsilon_0-1)\left(\delta-\gamma-\gamma\delta+\gamma^2+\gamma^2\delta-\gamma^3\right)
$$

$$
\begin{aligned}
N=h_e\Bigg\{&1-\frac{(\varepsilon_0-1)\gamma+\left(1+\varepsilon_0^2\right)\delta}{\varepsilon_0(1+\varepsilon_0)}+\frac{2(\varepsilon_0-1)\gamma^2+2(\varepsilon_0-1)^2\gamma\delta+\varepsilon_0\left(\varepsilon_0^2+3\right)\delta^2}{\varepsilon_0(1+\varepsilon_0)^2}\\
&-\frac{4(\varepsilon_0-1)\gamma^3+6(\varepsilon_0-1)^2\gamma^2\delta+3(\varepsilon_0-1)^3\gamma\delta^2+\left(\varepsilon_0^4+6\varepsilon_0^2+1\right)\delta^3}{\varepsilon_0(1+\varepsilon_0)^3}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M=h_m\Bigg\{&1-\frac{\gamma+\varepsilon_0\delta}{1+\varepsilon_0}+\frac{3\gamma^2+2(2\varepsilon_0-1)^2\gamma\delta+\left(2\varepsilon_0^2+1\right)\delta^2}{2(1+\varepsilon_0)^2}\\
&-\frac{5\gamma^3+3(3\varepsilon_0-2)\gamma^2\delta+3\left(2\varepsilon_0^2-2\varepsilon_0+1\right)\gamma\delta^2+\varepsilon_0\left(2\varepsilon_0^2+3\right)\delta^3}{2(1+\varepsilon_0)^3}\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{2-22}
$$

ここで

$$
\varepsilon_0=1+\frac{U_0}{m_0c^2},\ h_e=-\frac{e_0E_0\varepsilon_0}{U_0(1+\varepsilon_0)},\ h_m=-\frac{e_0B_0}{\sqrt{m_0U_0(1+\varepsilon_0)}}
\tag{2-23}
$$

ε_0は相対論的効果の補正項で，$\varepsilon_0=1$は相対論的な影響を無視することに相当する。

h_e，h_mはそれぞれ電場，磁場のみが存在するときの中心軌道の半径の逆数で，中心軌道を通る荷電粒子の受けるローレンツ力と遠心力のつりあい

$$h_0 m_0 v_0^2 = e v_0 B_0 + e E_0 = h_m m_0 v_0^2 + h_e m_0 v_0^2 \tag{2-24}$$

(v_0は中心軌道を通る荷電粒子の速度)より重畳場での中心軌道半径の逆数h_0との間には次の関係式が成り立つ。

$$h_0 = h_e \lambda_0 + h_m \mu_0 \tag{2-25}$$

(2-22)，(2-23)を(2-17)に代入すると(2-19)，(2-20)はそれぞれ

$$\begin{aligned} x'' + k_x x = {} & D_\gamma \gamma + D_\delta \delta + D_{xx} x^2 + D_{x\gamma} x\gamma + D_{x\delta} x\delta + D_{yy} y^2 + D_{x'x'} x'^2 + D_{y'y'} y'^2 \\ & + D_{\gamma\gamma} \gamma^2 + D_{\gamma\delta} \gamma\delta + D_{\delta\delta} \delta^2 + D_{xxx} x^3 + D_{xx\gamma} x^2\gamma + D_{xx\delta} x^2\delta + D_{xyy} xy^2 \\ & + D_{xx'x'} xx'^2 + D_{xy'y'} xy'^2 + D_{x\gamma\gamma} x\gamma^2 + D_{x\gamma\delta} x\gamma\delta + D_{x\delta\delta} x\delta^2 + D_{yy\gamma} y^2\gamma \\ & + D_{yy\delta} y^2\delta + D_{yx'y'} yx'y' + D_{x'x'\gamma} x'^2\gamma + D_{x'x'\delta} x'^2\delta + D_{y'y'\gamma} y'^2\gamma + D_{y'y'\delta} y'^2\delta \\ & + D_{\gamma\gamma\gamma} \gamma^3 + D_{\gamma\gamma\delta} \gamma^2\delta + D_{\gamma\delta\delta} \gamma\delta^2 + D_{\delta\delta\delta} \delta^3 \end{aligned} \tag{2-26}$$

$$\begin{aligned} y'' + k_y y = {} & D_{xy} xy + D_{y\gamma} y\gamma + D_{y\delta} y\delta + D_{x'y'} x'y' + D_{xxy} x^2 y + D_{xy\gamma} xy\gamma + D_{xy\delta} xy\delta \\ & + D_{xx'y'} xx'y' + D_{yyy} y^3 + D_{yx'x'} yx'^2 + D_{yy'y'} yy'^2 + D_{y\gamma\gamma} y\gamma^2 + D_{y\gamma\delta} y\gamma\delta \\ & + D_{y\delta\delta} y\delta^2 + D_{x'y'\gamma} x'y'\gamma + D_{x'y'\delta} x'y'\delta \end{aligned} \tag{2-27}$$

と書き直される。

k_x，k_yは次の式で表される定数で

$$\begin{aligned} k_x &= 2h_e^2 \lambda_0^2 + h_e^2 \lambda_0^2 / \varepsilon_0^2 + h_e \lambda_1 + 3 h_e h_m \lambda_0 \mu_0 + h_m^2 \mu_0^2 + h_m \mu_1 \\ k_y &= -h_e^2 \lambda_0^2 - h_e \lambda_1 + h_e h_m \lambda_0 \mu_0 - h_m \mu_1 \end{aligned} \tag{2-28}$$

値が正のときは収束，負のときは発散の効果をもたらす。

D_γ，D_δ …は長い表記となるのでここでは省略する。その一部は[6]のAppendix 1に示されている。

2-4　運動方程式の解

2-3で導出した方程式を解く方法としてラプラス変換法と係数比較法の2種類がある。両者の方法は共に1次を出発点に2次，3次……と1つ高い次数の解を順に求めていく逐次近似法である。

2-4-1　係数比較法

(1)　1次近似

方程式(2-26)，(2-27)の1次項だけを取り出すと

$$\begin{aligned} &x'' + k_x x = D_\gamma \gamma + D_\delta \delta \\ &y'' + k_y y = 0 \end{aligned} \tag{2-29}$$

$k_x>0$，$k_y>0$ とすると(2-29)の解を次のように仮定できる。

$$\begin{aligned} &x = A_1 \sin\left(\sqrt{k_x}\, z\right) + B_1 \cos\left(\sqrt{k_x}\, z\right) + C_1 \\ &y = A_2 \sin\left(\sqrt{k_y}\, z\right) + B_2 \cos\left(\sqrt{k_y}\, z\right) + C_2 \end{aligned} \tag{2-30}$$

初期条件は$z=0$で$x=x_0$，$x'=x'_0$，$y=y_0$，$y'=y'_0$とする。これを(2-29)の左辺に代入するとそれぞれ

$$\begin{aligned} &-k_x\left\{A_1 \sin\left(\sqrt{k_x} z\right) + B_1 \cos\left(\sqrt{k_y} z\right)\right\} + k_x\left\{A_1 \sin\left(\sqrt{k_x} z\right) + B_1 \cos\left(\sqrt{k_y} z\right) + C_1\right\} \\ &= k_x C_1 \\ &-k_y\left\{A_2 \sin\left(\sqrt{k_x} z\right) + B_2 \cos\left(\sqrt{k_y} z\right)\right\} + k_y\left\{A_2 \sin\left(\sqrt{k_x} z\right) + B_2 \cos\left(\sqrt{k_y} z\right) + C_2\right\} \\ &= k_y C_2 \end{aligned} \tag{2-31}$$

これを(2-29)の右辺と比較すると

$$C_1 = \frac{D_\gamma \gamma + D_\delta \delta}{k_x},\ C_2 = 0 \tag{2-32}$$

(2-30)およびその微分したものに$z=0$を代入すると初期条件から

$$A_1 = \frac{x'_0}{\sqrt{k_x}},\ B_1 = x_0 - \frac{D_\gamma \gamma + D_\delta \delta}{k_x},\ A_2 = \frac{y'_0}{\sqrt{k_y}},\ B_2 = y_0 \tag{2-33}$$

よって

$$x=\frac{x_0'}{\sqrt{k_x}}\sin\sqrt{k_x}z+\left(x_0-\frac{D_\gamma\gamma+D_\delta\delta}{k_x}\right)\cos\sqrt{k_x}z+\frac{D_\gamma\gamma+D_\delta\delta}{k_x}$$
$$=\left(\cos\sqrt{k_x}z\right)x_0+\left(\frac{\sin\sqrt{k_x}z}{\sqrt{k_x}}\right)x_0'+\frac{D_\gamma\left(1-\cos\sqrt{k_x}z\right)}{k_x}\gamma+\frac{D_\delta\left(1-\cos\sqrt{k_x}z\right)}{k_x}\delta$$

$$y=\frac{y_0'}{\sqrt{k_y}}\sin\sqrt{k_y}z+y_0\cos\sqrt{k_y}z=\left(\cos\sqrt{k_y}z\right)y_0+\left(\frac{\sin\sqrt{k_y}z}{\sqrt{k_y}}\right)y_0' \quad (2\text{-}34)$$

また導関数はそれぞれ

$$x'=\left(-\sqrt{k_x}\cdot\sin\sqrt{k_x}z\right)x_0+\left(\cos\sqrt{k_x}z\right)x_0'+\frac{D_\gamma\sin\sqrt{k_x}}{\sqrt{k_x}}\gamma+\frac{D_\delta\sin\sqrt{k_x}}{\sqrt{k_x}}\delta$$
$$y'=\left(-\sqrt{k_y}\cdot\sin\sqrt{k_y}z\right)y_0+\left(\cos\sqrt{k_y}z\right)y_0' \quad (2\text{-}35)$$

k_xやk_yが負のときも三角関数の代わりに双曲線関数を用いることによって同様の結果が得られ，1次近似解は次のようにまとめられる。

$$x_{\mathrm{I}}=C_x\cdot x_0+S_x\cdot x_0'+\frac{D_\gamma(1-C_x)}{k_x}\gamma+\frac{D_\delta(1-C_x)}{k_x}\delta$$
$$x_{\mathrm{I}}'=(-k_xS_x)x_0+C_x\cdot x_0'+D_\gamma S_x\cdot\gamma+D_\delta S_x\cdot\delta \quad (2\text{-}36)$$

$$y_{\mathrm{I}}=C_y\cdot y_0+S_y\cdot y_0'$$
$$y_{\mathrm{I}}'=(-k_yS_y)y_0+C_y\cdot y_0' \quad (2\text{-}37)$$

S_x，C_x，S_y，C_yの定義を表2-2に示す。

（2）　2次近似

方程式(2-26)，(2-27)の2次項まで取った式

$$
\begin{aligned}
x''+k_x x &= D_\gamma\gamma + D_\delta\delta + D_{xx}x^2 + D_{x\gamma}x\gamma + D_{x\delta}x\delta + D_{yy}y^2 + D_{x'x'}x'^2 + D_{y'y'}y'^2 \\
&\quad + D_{\gamma\gamma}\gamma^2 + D_{\gamma\delta}\gamma\delta + D_{\delta\delta}\delta^2 \\
y''+k_y y &= D_{xy}xy + D_{y\gamma}y\gamma + D_{y\delta}y\delta + D_{x'y'}x'y'
\end{aligned}
\tag{2-38}
$$

の右辺に(1)で求めた1次解(2-36)，(2-37)を代入し，2次より高い次数の項を無視すると運動方程式は次のように定義されるG行列を使ってまとめられる。

$$
\begin{aligned}
x''_{\mathrm{II}} + k_x x_{\mathrm{II}} &= \sum_{m_{x_{\mathrm{II}}}}\sum_{n_{x_{\mathrm{II}}}} m_{x_{\mathrm{II}}} n_{x_{\mathrm{II}}} G\left(n_{x_{\mathrm{II}}} \middle| m_{x_{\mathrm{II}}}\right) \\
&\equiv G(xx|1)x^2 + G(xx|S_x)S_x x^2 + \cdots + G(xx|C_x z)C_x z x^2 \\
&\quad + G(xx'|1)xx' + G(xx'|S_x)S_x xx' + \cdots + G(xx'|C_x z)C_x z xx' \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + G(y'y'|1)y'^2 + G(y'y'|S_x)S_x y'^2 + \cdots + G(y'y'|C_x z)C_x z y'^2
\end{aligned}
\tag{2-39}
$$

$$
\begin{aligned}
y''_{\mathrm{II}} + k_y y_{\mathrm{II}} &= \sum_{m_{y_{\mathrm{II}}}}\sum_{n_{y_{\mathrm{II}}}} m_{y_{\mathrm{II}}} n_{y_{\mathrm{II}}} G\left(n_{y_{\mathrm{II}}} \middle| m_{y_{\mathrm{II}}}\right) \\
&\equiv G(xy|S_y)S_y xy + G(xy|C_y)C_y xy + \cdots + G(xy|C_y z)C_y z xy \\
&\quad + G(xy'|S_y)S_y xy' + G(xy'|C_y)C_y xy' + \cdots + G(xy'|C_y z)C_y z xy' \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + G(\delta y'|S_y)S_y \delta y' + G(\delta y'|C_y)C_y \delta y' + \cdots + G(\delta y'|C_y z)C_y z \delta y'
\end{aligned}
\tag{2-40}
$$

$m_{x_{\mathrm{II}}}$，$n_{x_{\mathrm{II}}}$，$m_{y_{\mathrm{II}}}$，$n_{y_{\mathrm{II}}}$は次のような値を取りうる。

$$
\begin{aligned}
m_{x_{\mathrm{II}}} &= 1,\ S_x,\ C_x,\ S_x^2,\ S_x C_x,\ S_y^2,\ S_y C_y,\ z,\ S_x z,\ C_x z \\
n_{x_{\mathrm{II}}} &= xx,\ xx',\ x\gamma,\ x\delta,\ x'x',\ x'\gamma,\ x'\delta,\ \gamma\gamma,\ \gamma\delta,\ \delta\delta,\ yy,\ yy',\ y'y' \\
m_{y_{\mathrm{II}}} &= S_y,\ C_y,\ S_x S_y,\ C_x C_y,\ S_x C_y,\ C_x S_y,\ S_y z,\ C_y z \\
n_{y_{\mathrm{II}}} &= xy,\ xy',\ x'y,\ x'y',\ \gamma y,\ \gamma y',\ \delta y,\ \delta y'
\end{aligned}
\tag{2-41}
$$

2次のG行列の表式は[6]のAppendix 4に掲載されている。

これを解くために運動方程式(2-39)，(2-40)の解をH行列を使って次式のよ

うに仮定する。

$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{II}} &= \sum_{m_{x_{\mathrm{II}}}} \sum_{n_{x_{\mathrm{II}}}} m_{x_{\mathrm{II}}} n_{x_{\mathrm{II}}} H\left(n_{x_{\mathrm{II}}} \middle| m_{x_{\mathrm{II}}}\right) \\
&\equiv H(xx|1)x^2 + H(xx|S_x)S_x x^2 + \cdots + H(xx|C_x z)C_x z x^2 \\
&\quad + H(xx'|1)xx' + H(xx'|S_x)S_x xx' + \cdots + H(xx'|C_x z)C_x z xx' \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + H(y'y'|1)y'^2 + H(y'y'|S_x)S_x y'^2 + \cdots + H(y'y'|C_x z)C_x z y'^2
\end{aligned}
\tag{2-42}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{II}} &= \sum_{m_{y_{\mathrm{II}}}} \sum_{n_{y_{\mathrm{II}}}} m_{y_{\mathrm{II}}} n_{y_{\mathrm{II}}} H\left(n_{y_{\mathrm{II}}} \middle| m_{y_{\mathrm{II}}}\right) \\
&\equiv H(xy|S_y)S_y xy + H(xy|C_y)C_y xy + \cdots + H(xy|C_y z)C_y z xy \\
&\quad + H(xy'|S_y)S_y xy' + H(xy'|C_y)C_y xy' + \cdots + H(xy'|C_y z)C_y z xy' \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + H(\delta y'|S_y)S_y \delta y' + H(\delta y'|C_y)C_y \delta y' + \cdots + H(\delta y'|C_y z)C_y z \delta y'
\end{aligned}
\tag{2-43}
$$

これを左辺に代入し，両辺それぞれの全ての$m_{x_{\mathrm{II}}}$，$n_{x_{\mathrm{II}}}$や$m_{y_{\mathrm{II}}}$，$n_{y_{\mathrm{II}}}$の係数を比較するといくつかの式ができるのでこれらを連立方程式として解けばH行列はG行列の関数として求められる。2次のH行列の表式は[6]のAppendix 5に掲載されている。

（3） 3次近似

（2）と同様に方程式(2-26)，(2-27)の右辺に1，2次近似解(2-36)+(2-42)，(2-37)+(2-43)をそれぞれ代入し，3次の項まで取ると

$$
\begin{aligned}
x''_{\mathrm{III}} + k_x x_{\mathrm{III}} &= \sum_{m_{x_{\mathrm{III}}}} \sum_{n_{x_{\mathrm{III}}}} m_{x_{\mathrm{III}}} n_{x_{\mathrm{III}}} G\left(n_{x_{\mathrm{III}}} \middle| m_{x_{\mathrm{III}}}\right) \\
&\equiv G(xxx|1)x^3 + G(xxx|S_x)S_x x^3 + \cdots + G\left(xxx|C_x z^2\right)C_x z^2 x^3 \\
&\quad + G(xxx'|1)x^2 x' + G(xxx'|S_x)S_x x^2 x' + \cdots + G\left(xxx'|C_x z^2\right)C_x z^2 x^2 x' \\
&\quad + \cdots\cdots \\
&\quad + G(\delta y'y'|1)\delta y'^2 + G(\delta y'y'|S_x)S_x \delta y'^2 + \cdots + G\left(\delta y'y'|C_x z^2\right)C_x z^2 \delta y'^2
\end{aligned}
\tag{2-44}
$$

$$
\begin{aligned}
y''_{\mathrm{III}} + k_y y_{\mathrm{III}} &= \sum_{m_{y_{\mathrm{III}}}} \sum_{n_{y_{\mathrm{III}}}} m_{y_{\mathrm{III}}} n_{y_{\mathrm{III}}} G\left(n_{y_{\mathrm{III}}} \middle| m_{y_{\mathrm{III}}}\right) \\
&\equiv G(yyy|S_y)S_y y^3 + G(yyy|C_y)C_y y^3 + \cdots + G\left(yyy|C_y z^2\right)C_y z^2 y^3 \\
&\quad + G(yyy'|S_y)S_y y^2 y' + G(yyy'|C_y)C_y y^2 y' + \cdots + G\left(yyy'|C_y z^2\right)C_y z^2 y^2 y' \\
&\quad + \cdots\cdots \\
&\quad + G(\delta\delta y'|S_y)S_y \delta^2 y' + G(\delta\delta y'|C_y)C_y \delta^2 y' + \cdots + G\left(\delta\delta y'|C_y z^2\right)C_y z^2 \delta^2 y'
\end{aligned}
\tag{2-45}
$$

$m_{x_{\mathrm{III}}}$, $n_{x_{\mathrm{III}}}$, $m_{y_{\mathrm{III}}}$, $n_{y_{\mathrm{III}}}$の取りうる値は

$$
\begin{aligned}
m_{x_{\mathrm{III}}} &= 1, S_x, C_x, S_x^2, S_x C_x, S_y^2, S_y C_y, z, S_x z, C_x z, S_x^3, S_x^2 C_x, S_x S_y^2, C_x S_y^2, S_x S_y C_y, \\
&\quad C_x S_y C_y, S_x^2 z, S_x C_x z, S_y^2 z, S_y C_y z, S_x z^2, C_x z^2 \\
n_{x_{\mathrm{III}}} &= xxx, xxx', xx\gamma, xx\delta, xx'x', xx'\gamma, xx'\delta, x\gamma\gamma, x\gamma\delta, x\delta\delta, x'x'x', x'x'\gamma, \\
&\quad x'x'\delta, x'\gamma\gamma, x'\gamma\delta, x'\delta\delta, \gamma\gamma\gamma, \gamma\gamma\delta, \gamma\delta\delta, \delta\delta\delta, xyy, xyy', xy'y', x'yy, \\
&\quad x'yy', x'y'y', \gamma yy, \gamma yy', \gamma y'y', \delta yy, \delta yy', \delta y'y'
\end{aligned}
\tag{2-46}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{y_{\mathrm{III}}} &= S_y, C_y, S_x S_y, C_x C_y, S_x C_y, C_x S_y, S_y z, C_y z, S_y^2 C_y, S_y^3, S_x^2 S_y, S_x^2 C_y, \\
&\quad S_x C_x S_y, S_x C_x C_y, S_x S_y z, C_x C_y z, S_x C_y z, C_x S_y z, S_y z^2, C_y z^2 \\
n_{y_{\mathrm{III}}} &= yyy, yyy', yy'y', y'y'y', xxy, xxy', xx'y, xx'y', x\gamma y, x\gamma y', x\delta y, x\delta y', \\
&\quad x'x'y, x'x'y', x'\gamma y, x'\gamma y', x'\delta y, x'\delta y', \gamma\gamma y, \gamma\gamma y', \gamma\delta y, \gamma\delta y', \delta\delta y, \delta\delta y'
\end{aligned}
\tag{2-47}
$$

3次のG行列の具体的な表式は[6]のAppendix 6に掲載されている。

運動方程式の解の仮定式を

$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{III}} &= \sum_{m_{x_{\mathrm{III}}}} \sum_{n_{x_{\mathrm{III}}}} m_{x_{\mathrm{III}}} n_{x_{\mathrm{III}}} H\left(n_{x_{\mathrm{III}}} \middle| m_{x_{\mathrm{III}}}\right) \\
&\equiv H(xxx|1)x^3 + H(xxx|S_x)S_x x^3 + \cdots + H\left(xxx|C_x z^2\right)C_x z^2 x^3 \\
&\quad + H(xxx'|1)x^2 x' + H(xxx'|S_x)S_x x^2 x' + \cdots + H\left(xxx'|C_x z^2\right)C_x z^2 x^2 x' \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + H(\delta y' y'|1)\delta y'^2 + H(\delta y' y'|S_x)S_x \delta y'^2 + \cdots + H\left(\delta y' y'|C_x z^2\right)C_x z^2 \delta y'^2
\end{aligned}
\tag{2-48}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{III}} &= \sum_{m_{y_{\mathrm{III}}}} \sum_{n_{y_{\mathrm{III}}}} m_{y_{\mathrm{III}}} n_{y_{\mathrm{III}}} H\left(n_{y_{\mathrm{III}}} \middle| m_{y_{\mathrm{III}}}\right) \\
&\equiv H(yyy|S_y)S_y y^3 + H(yyy|C_y)C_y y^3 + \cdots + H\left(yyy|C_y z^2\right)C_y z^2 y^3 \\
&\quad + H(yyy'|S_y)S_y y^2 y' + H(yyy'|C_y)C_y y^2 y' + \cdots + H\left(yyy'|C_y z^2\right)C_y z^2 y^2 y' \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad + H(\delta\delta y'|S_y)S_y \delta^2 y' + H(\delta\delta y'|C_y)C_y \delta^2 y' + \cdots + H\left(\delta\delta y'|C_y z^2\right)C_y z^2 \delta^2 y'
\end{aligned}
\tag{2-49}
$$

と置くと(2)と同様，H行列とG行列の関係から3次の解が得られる。3次のH行列の具体的な表式は[6]のAppendix 7に掲載されている。

表2-2：S_x，C_x，S_y，C_yの定義

	k_x，k_yが正の場合	k_x，k_yが負の場合
S_x	$\dfrac{\sin\left(\sqrt{k_x}z\right)}{\sqrt{k_x}}$	$\dfrac{\sinh\left(\sqrt{-k_x}z\right)}{\sqrt{-k_x}}$
C_x	$\cos\left(\sqrt{k_x}z\right)$	$\cosh\left(\sqrt{-k_x}z\right)$
S_y	$\dfrac{\sin\left(\sqrt{k_y}z\right)}{\sqrt{k_y}}$	$\dfrac{\sinh\left(\sqrt{-k_y}z\right)}{\sqrt{-k_y}}$
C_y	$\cos\left(\sqrt{k_y}z\right)$	$\cosh\left(\sqrt{-k_y}z\right)$

2-4-2　ラプラス変換法

方程式(2-26)，(2-27)を解く方法としてラプラス変換と呼ばれる次の関数変換式を使う方法がある。

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (2\text{-}50)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\big[\mathcal{L}[f(t)]\big]=f(t)$$

係数比較法では得られた解を方程式の右辺に代入して両辺を比較することによって1つ高い次数の解を求めていたが，ラプラス変換法では両辺の係数を比較する代わりに両辺をラプラス変換する。

例として3次のxを求める場合を挙げる。

$$\mathcal{L}[x]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}x\,\mathrm{d}t\equiv X(s) \qquad (2\text{-}51)$$

とすると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x'']&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}x''\,\mathrm{d}t=\left[\mathrm{e}^{-st}x'\right]_0^\infty+s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}x'\,\mathrm{d}t\\&=-x_0'+s\left[\mathrm{e}^{-st}x\right]_0^\infty+s^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}x\,\mathrm{d}t=s^2X(s)-\left(sx_0+x_0'\right)\end{aligned} \qquad (2\text{-}52)$$

なので2次解を方程式(2-26)の右辺に代入し，両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s)-\left(sx_0+x_0'\right)+k_xX(s)=s^{-1}\left(D_\gamma\gamma+D_\delta\delta\right)+\sum_{i,j}D_{ij}\mathcal{L}\left[x_ix_j\right]+\sum_{i,j,k}D_{ijk}\mathcal{L}\left[x_ix_jx_k\right] \qquad (2\text{-}53)$$

ここで

$$\begin{aligned}D_{ij}x_ix_j&=\left\{D_{xx}x^2,\ D_{x\gamma}x\gamma,\ D_{x\delta}x\delta,\cdots\cdots,\ D_{\delta\delta}\delta\delta\right\}\\D_{ijk}x_ix_jx_k&=\left\{D_{xxx}x^3,\ D_{xx\gamma}x^2\gamma,\ D_{xx\delta}x^2\delta,\cdots\cdots,\ D_{\delta\delta\delta}\delta^3\right\}\end{aligned} \qquad (2\text{-}54)$$

をそれぞれ意味する。(2-53)から$X(s)$を求めると

$$X(s)=\frac{sx_0+x_0'}{s^2+k_x}+\frac{D_\gamma\gamma+D_\delta\delta}{s\left(s^2+k_x\right)}+\frac{\sum_{i,j}D_{ij}\mathcal{L}\left[x_ix_j\right]}{s^2+k_x}+\frac{\sum_{i,j,k}D_{ijk}\mathcal{L}\left[x_ix_jx_k\right]}{s^2+k_x} \qquad (2\text{-}55)$$

よって(2-26)の3次解は逆ラプラス変換を行って

$$x(z) = \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] \tag{2-56}$$

と求められる。3次のyや2次の解も同様にして求めることができる。

2-5　マトリクス表示

荷電粒子の軌道を数値的に計算するためには方程式の解をマトリクス表示で表すと便利である。2-4で得られた結果をまとめて示すと

1次解

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I}} &= C_x \cdot x_0 + S_x \cdot x_0' + \frac{D_\gamma\left(1-C_x\right)}{k_x}\gamma + \frac{D_\delta\left(1-C_x\right)}{k_x}\delta \\ &= X_x x_0 + X_{x'} x_0' + X_\gamma \gamma + X_\delta \delta \end{aligned} \tag{2-57}$$

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{I}}' &= \left(-k_x S_x\right) x_0 + C_x \cdot x_0' + D_\gamma S_x \cdot \gamma + D_\delta S_x \cdot \delta \\ &= X_x' x_0 + X_{x'}' x_0' + X_\gamma' \gamma + X_\delta' \delta \end{aligned} \tag{2-58}$$

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{I}} &= C_y \cdot y_0 + S_y \cdot y_0' \\ &= Y_y y_0 + Y_{y'} y_0' \end{aligned} \tag{2-59}$$

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{I}}' &= \left(-k_y S_y\right) y_0 + C_y \cdot y_0' \\ &= Y_y' y_0 + Y_{y'}' y_0' \end{aligned} \tag{2-60}$$

2次解

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{II}} &= \sum_{m_{x_{\mathrm{II}}}} \sum_{n_{x_{\mathrm{II}}}} m_{x_{\mathrm{II}}} n_{x_{\mathrm{II}}} H\left(n_{x_{\mathrm{II}}} \middle| m_{x_{\mathrm{II}}}\right) \\ &= X_{xx} x_0^2 + X_{xx'} x_0 x_0' + X_{x\gamma} x_0 \gamma + X_{x\delta} x_0 \delta_0 + X_{x'x'} x_0'^2 + X_{x'\gamma} x_0' \gamma + X_{x'\delta} x_0' \delta \\ &\quad + X_{\gamma\gamma} \gamma^2 + X_{\gamma\delta} \gamma\delta + X_{\delta\delta} \delta^2 + X_{yy} y_0^2 + X_{yy'} y_0 y_0' + X_{y'y'} y_0'^2 \end{aligned} \tag{2-61}$$

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{II}}' &= \sum_{m_{x_{\mathrm{II}}}} \sum_{n_{x_{\mathrm{II}}}} \frac{\mathrm{d} m_{x_{\mathrm{II}}}}{\mathrm{d}z} n_{x_{\mathrm{II}}} H\left(n_{x_{\mathrm{II}}} \middle| m_{x_{\mathrm{II}}}\right) \\ &= X_{xx}' x_0^2 + X_{xx'}' x_0 x_0' + X_{x\gamma}' x_0 \gamma + X_{x\delta}' x_0 \delta + X_{x'x'}' x_0'^2 + X_{x'\gamma}' x_0' \gamma + X_{x'\delta}' x_0' \delta \\ &\quad + X_{\gamma\gamma}' \gamma^2 + X_{\gamma\delta}' \gamma\delta + X_{\delta\delta}' \delta^2 + X_{yy}' y_0^2 + X_{yy'}' y_0 y_0' + X_{y'y'}' y_0'^2 \end{aligned} \tag{2-62}$$

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{II}} &= \sum_{m_{y_{\mathrm{II}}}} \sum_{n_{y_{\mathrm{II}}}} m_{y_{\mathrm{II}}} n_{y_{\mathrm{II}}} H\left(n_{y_{\mathrm{II}}} \middle| m_{y_{\mathrm{II}}}\right) \\
&= Y_{xy} x_0 y_0 + Y_{xy'} x_0 y'_0 + Y_{x'y} x'_0 y_0 + Y_{x'y'} x'_0 y'_0 + Y_{\gamma y} \gamma y_0 + Y_{\gamma y'} \gamma y'_0 + Y_{\delta y} \delta y_0 + Y_{\delta y'} \delta y'_0
\end{aligned}
\tag{2-63}
$$

$$
\begin{aligned}
y'_{\mathrm{II}} &= \sum_{m_{y_{\mathrm{II}}}} \sum_{n_{y_{\mathrm{II}}}} \frac{\mathrm{d} m_{y_{\mathrm{II}}}}{\mathrm{d}z} n_{y_{\mathrm{II}}} H\left(n_{y_{\mathrm{II}}} \middle| m_{y_{\mathrm{II}}}\right) \\
&= Y'_{xy} x_0 y_0 + Y'_{xy'} x_0 y'_0 + Y'_{x'y} x'_0 y_0 + Y'_{x'y'} x'_0 y'_0 + Y'_{\gamma y} \gamma y_0 + Y'_{\gamma y'} \gamma y'_0 + Y'_{\delta y} \delta y_0 + Y'_{\delta y'} \delta y'_0
\end{aligned}
\tag{2-64}
$$

3次解

$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{III}} &= \sum_{m_{x_{\mathrm{III}}}} \sum_{n_{x_{\mathrm{III}}}} m_{x_{\mathrm{III}}} n_{x_{\mathrm{III}}} H\left(n_{x_{\mathrm{III}}} \middle| m_{x_{\mathrm{III}}}\right) \\
&= X_{xxx} x_0^3 + X_{xxx'} x_0^2 x'_0 + X_{xx\gamma} x_0^2 \gamma + X_{xx\delta} x_0^2 \delta + X_{xx'x'} x_0 x_0'^2 + X_{xx'\gamma} x_0 x'_0 \gamma + X_{xx'\delta} x_0 x'_0 \delta \\
&\quad + X_{x\gamma\gamma} x_0 \gamma^2 + X_{x\gamma\delta} x_0 \gamma\delta + X_{x\delta\delta} x_0 \delta^2 + X_{x'x'x'} x_0'^3 + X_{x'x'\gamma} x_0'^2 \gamma + X_{x'x'\delta} x_0'^2 \delta \\
&\quad + X_{x'\gamma\gamma} x'_0 \gamma^2 + X_{x'\gamma\delta} x'_0 \gamma\delta + X_{x'\delta\delta} x'_0 \delta^2 + X_{\gamma\gamma\gamma} \gamma^3 + X_{\gamma\gamma\delta} \gamma^2 \delta + X_{\gamma\delta\delta} \gamma \delta^2 + X_{\delta\delta\delta} \delta^3 \\
&\quad + X_{xyy} x_0 y_0^2 + X_{xyy'} x_0 y_0 y'_0 + X_{xy'y'} x_0 y_0'^2 + X_{x'yy} x'_0 y_0^2 + X_{x'yy'} x'_0 y_0 y'_0 + X_{x'y'y'} x'_0 y_0'^2 \\
&\quad + X_{\gamma yy} \gamma y_0^2 + X_{\gamma yy'} \gamma y_0 y'_0 + X_{\gamma y'y'} \gamma y_0'^2 + X_{\delta yy} \delta y_0^2 + X_{\delta yy'} \delta y_0 y'_0 + X_{\delta y'y'} \delta y_0'^2
\end{aligned}
\tag{2-65}
$$

$$
\begin{aligned}
x'_{\mathrm{III}} &= \sum_{m_{x_{\mathrm{III}}}} \sum_{n_{x_{\mathrm{III}}}} \frac{\mathrm{d} m_{x_{\mathrm{III}}}}{\mathrm{d}z} n_{x_{\mathrm{III}}} H\left(n_{x_{\mathrm{III}}} \middle| m_{x_{\mathrm{III}}}\right) \\
&= X'_{xxx} x_0^3 + X'_{xxx'} x_0^2 x'_0 + X'_{xx\gamma} x_0^2 \gamma + X'_{xx\delta} x_0^2 \delta + X'_{xx'x'} x_0 x_0'^2 + X'_{xx'\gamma} x_0 x'_0 \gamma + X'_{xx'\delta} x_0 x'_0 \delta \\
&\quad + X'_{x\gamma\gamma} x_0 \gamma^2 + X'_{x\gamma\delta} x_0 \gamma\delta + X'_{x\delta\delta} x_0 \delta^2 + X'_{x'x'x'} x_0'^3 + X'_{x'x'\gamma} x_0'^2 \gamma + X'_{x'x'\delta} x_0'^2 \delta \\
&\quad + X'_{x'\gamma\gamma} x'_0 \gamma^2 + X'_{x'\gamma\delta} x'_0 \gamma\delta + X'_{x'\delta\delta} x'_0 \delta^2 + X'_{\gamma\gamma\gamma} \gamma^3 + X'_{\gamma\gamma\delta} \gamma^2 \delta + X'_{\gamma\delta\delta} \gamma \delta^2 + X'_{\delta\delta\delta} \delta^3 \\
&\quad + X'_{xyy} x_0 y_0^2 + X'_{xyy'} x_0 y_0 y'_0 + X'_{xy'y'} x_0 y_0'^2 + X'_{x'yy} x'_0 y_0^2 + X'_{x'yy'} x'_0 y_0 y'_0 + X'_{x'y'y'} x'_0 y_0'^2 \\
&\quad + X'_{\gamma yy} \gamma y_0^2 + X'_{\gamma yy'} \gamma y_0 y'_0 + X'_{\gamma y'y'} \gamma y_0'^2 + X'_{\delta yy} \delta y_0^2 + X'_{\delta yy'} \delta y_0 y'_0 + X'_{\delta y'y'} \delta y_0'^2
\end{aligned}
\tag{2-66}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{III}} &= \sum_{m_{y_{\mathrm{III}}}} \sum_{n_{y_{\mathrm{III}}}} m_{y_{\mathrm{III}}} n_{y_{\mathrm{III}}} H\left(n_{y_{\mathrm{III}}} \middle| m_{y_{\mathrm{III}}}\right) \\
&= Y_{yyy} y_0^3 + Y_{yyy'} y_0^2 y'_0 + Y_{yy'y'} y_0 y_0'^2 + Y_{y'y'y'} y_0'^3 + Y_{xxy} x_0^2 y_0 + Y_{xxy'} x_0^2 y'_0 + Y_{xx'y} x_0 x'_0 y_0 \\
&\quad + Y_{xx'y'} x_0 x'_0 y'_0 + Y_{x\gamma y} x_0 \gamma y_0 + Y_{x\gamma y'} x_0 \gamma y'_0 + Y_{x\delta y} x_0 \delta y_0 + Y_{x\delta y'} x_0 \delta y'_0 + Y_{x'x'y} x_0'^2 y_0 \\
&\quad + Y_{x'x'y'} x_0'^2 y'_0 + Y_{x'\gamma y} x'_0 \gamma y_0 + Y_{x'\gamma y'} x'_0 \gamma y'_0 + Y_{x'\delta y} x'_0 \delta y_0 + Y_{x'\delta y'} x'_0 \delta y'_0 + Y_{\gamma\gamma y} \gamma^2 y_0 \\
&\quad + Y_{\gamma\gamma y'} \gamma^2 y'_0 + Y_{\gamma\delta y} \gamma \delta y_0 + Y_{\gamma\delta y'} \gamma \delta y'_0 + Y_{\delta\delta y} \delta^2 y_0 + Y_{\delta\delta y'} \delta^2 y'_0
\end{aligned}
\tag{2-67}
$$

$$
\begin{aligned}
y'_{\mathrm{III}} &= \sum_{m_{y_{\mathrm{III}}}} \sum_{n_{y_{\mathrm{III}}}} \frac{\mathrm{d}m_{y_{\mathrm{III}}}}{\mathrm{d}z} n_{y_{\mathrm{III}}} H\left(n_{y_{\mathrm{III}}} \middle| m_{y_{\mathrm{III}}}\right) \\
&= Y'_{yyy} y_0^3 + Y'_{yyy'} y_0^2 y'_0 + Y'_{yy'y'} y_0 y_0'^2 + Y'_{y'y'y'} y_0'^3 + Y'_{xxy} x_0^2 y_0 + Y'_{xxy'} x_0^2 y'_0 + Y'_{xx'y} x_0 x'_0 y_0 \\
&\quad + Y'_{xx'y'} x_0 x'_0 y'_0 + Y'_{x\gamma y} x_0 \gamma y_0 + Y'_{x\gamma y'} x_0 \gamma y'_0 + Y'_{x\delta y} x_0 \delta y_0 + Y'_{x\delta y'} x_0 \delta y'_0 + Y'_{x'x'y} x_0'^2 y_0 \\
&\quad + Y'_{x'x'y'} x_0'^2 y'_0 + Y'_{x'\gamma y} x'_0 \gamma y_0 + Y'_{x'\gamma y'} x'_0 \gamma y'_0 + Y'_{x'\delta y} x'_0 \delta y_0 + Y'_{x'\delta y'} x'_0 \delta y'_0 + Y'_{\gamma\gamma y} \gamma^2 y_0 \\
&\quad + Y'_{\gamma\gamma y'} \gamma^2 y'_0 + Y'_{\gamma\delta y} \gamma \delta y_0 + Y'_{\gamma\delta y'} \gamma \delta y'_0 + Y'_{\delta\delta y} \delta^2 y_0 + Y'_{\delta\delta y'} \delta^2 y'_0
\end{aligned}
\tag{2-68}
$$

となる。(2-61)～(2-68)の係数の具体的な値の一部は[6]のAppendix 3に示されている。

1次から3次までを合わせた全体の解は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
x &= x_{\mathrm{I}} + x_{\mathrm{II}} + x_{\mathrm{III}} \\
x' &= x'_{\mathrm{I}} + x'_{\mathrm{II}} + x'_{\mathrm{III}} \\
y &= y_{\mathrm{I}} + y_{\mathrm{II}} + y_{\mathrm{III}} \\
y' &= y'_{\mathrm{I}} + y'_{\mathrm{II}} + y'_{\mathrm{III}}
\end{aligned}
\tag{2-69}
$$

よって図2-4，2-5のようなマトリクス$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$とベクトル$\vec{x}, \vec{x}_0, \vec{y}, \vec{y}_0$を使って解は形式的に次のように表せる。

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= \boldsymbol{X} \vec{x}_0 \\
\vec{y} &= \boldsymbol{Y} \vec{y}_0
\end{aligned}
\tag{2-70}
$$

$\vec{x}, \vec{y}$の成分はそれぞれ次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\vec{x} = \{ & x,\ x',\ \gamma,\ \delta,\ xx,\ xx',\ x\gamma,\ x\delta,\ x'x',\ x'\gamma,\ x'\delta,\ \gamma\gamma,\ \gamma\delta,\ \delta\delta,\ yy,\ yy',\ y'y', \\
& xxx,\ xxx',\ xx\gamma,\ xx\delta,\ xx'x',\ xx'\gamma,\ xx'\delta,\ x\gamma\gamma,\ x\gamma\delta,\ x\delta\delta,\ x'x'x',\ x'x'\gamma,\ x'x'\delta, \\
& x'\gamma\gamma,\ x'\gamma\delta,\ x'\delta\delta,\ \gamma\gamma\gamma,\ \gamma\gamma\delta,\ \gamma\delta\delta,\ \delta\delta\delta,\ xyy,\ xyy',\ xy'y',\ x'yy,\ x'yy',\ x'y'y', \\
& \gamma yy,\ \gamma yy',\ \gamma y'y',\ \delta yy,\ \delta yy',\ \delta y'y' \}
\end{aligned}
\tag{2-71}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{y} = \{ & y,\ y',\ xy,\ xy',\ x'y,\ x'y',\ \gamma y,\ \gamma y',\ \delta y,\ \delta y', \\
& yyy,\ yyy',\ yy'y',\ y'y'y',\ xxy,\ xxy',\ xx'y,\ xx'y',\ x\gamma y,\ x\gamma y',\ x\delta y,\ x\delta y', \\
& x'x'y,\ x'x'y',\ x'\gamma y,\ x'\gamma y',\ x'\delta y,\ x'\delta y',\ \gamma\gamma y,\ \gamma\gamma y',\ \gamma\delta y,\ \gamma\delta y',\ \delta\delta y,\ \delta\delta y' \}
\end{aligned}
\tag{2-72}
$$

$\boldsymbol{X}$の1行目は(2-57)，(2-61)，(2-65)の各X，1行目は(2-58)，(2-62)，(2-66)の各X'，$\boldsymbol{Y}$の1行目は(2-59)，(2-63)，(2-67)の各Y，2行目は(2-60)，(2-64)，

(2-68)の各Y'からなる。

実際のイオン光学系では自由空間，電場，磁場といったイオン光学系を構成している要素ごとにマトリクスを求め，

$$\begin{aligned}\vec{x} &= X_n \times \cdots \times X_2 \times X_1 \vec{x}_0 \\ \vec{y} &= Y_n \times \cdots \times Y_2 \times Y_1 \vec{y}_0\end{aligned} \tag{2-73}$$

というようにマトリクスを順に掛け合わすことによって計算を行う。

																			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x'	x'	x'	x'	x'	x'	γ	γ	γ	δ	x	x	x	x'	x'	x'	γ	γ	γ	δ	δ	δ
					x	x	x	x	x'	x'	x'	γ	γ	δ	y	y	y'	x	x	x	x	x'	x'	x'	γ	γ	δ	x'	x'	x'	γ	γ	δ	γ	γ	δ	δ	y	y	y'	y	y	y'	y	y	y'	y	y	y'
	x	x'	γ	δ	x	x'	γ	δ	x'	γ	δ	γ	δ	δ	y	y'	y'	x	x'	γ	δ	x'	γ	δ	γ	δ	δ	x'	γ	δ	γ	δ	δ	γ	δ	δ	δ	y	y'	y'	y	y'	y'	y	y'	y'	y	y'	y'
x	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
x'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'	X'
γ	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
δ	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xx	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
xx'	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
xγ	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	x	0	x	x	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	0	0	0
xδ	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	x	0	x	x	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x
x'x'	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x'γ	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	x	0	x	x	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	0	0	0
x'δ	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	x	0	x	x	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x
γγ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
γδ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
δδ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
yy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
yy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
y'y'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
xxx	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xxx'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xxγ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	x	0	x	x	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xxδ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	x	0	x	x	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xx'x'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xx'γ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	x	0	x	x	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xx'δ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	x	0	x	x	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xγγ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	x	0	0	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xγδ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	x	0	0	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xδδ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	x	0	0	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x'x'x'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x'x'γ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	x	0	x	x	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x'x'δ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	x	0	x	x	0	0	x	0	x	x	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x'γγ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	x	0	0	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x'γδ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	x	0	0	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x'δδ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	0	0	0	0	0	x	0	0	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
γγγ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
γγδ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
γδδ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
δδδ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xyy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
xyy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
xy'y'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x'yy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x'yy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
x'y'y'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
γyy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	0	0	0
γyy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	0	0	0
γy'y'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	0	0	0
δyy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x
δyy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x
δy'y'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x

図2-4:*X*マトリクス(X, X', xは成分があることを意味する)

											y	y	y	y'	x	x	x	x	x	x	x	x	x'	x'	x'	x'	x'	x'	γ	γ	γ	γ	δ	δ
			x	x	x'	x'	γ	γ	δ	δ	y	y	y'	y'	x	x	x'	x'	γ	γ	δ	δ	x'	x'	γ	γ	δ	δ	γ	γ	δ	δ	δ	δ
	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y'	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'
y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'	Y'
xy	0	0	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y
xy'	0	0	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y
x'y	0	0	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y
x'y'	0	0	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y
γy	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	y	y	0	0	y	y	y	y	0	0
γy'	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	y	y	0	0	y	y	y	y	0	0
δy	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	y	y	0	0	y	y	y	y
δy'	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	y	y	0	0	y	y	y	y
yyy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	y	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
yyy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	y	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
yy'y'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	y	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y'y'y'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	y	y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xxy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y
xxy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y
xx'y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y
xx'y'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y
xγy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	y	y	0	0	y	y	y	y	0	0
xγy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	y	y	0	0	y	y	y	y	0	0
xδy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	y	y	0	0	y	y	y	y
xδy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	y	y	0	0	y	y	y	y
x'x'y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y
x'x'y'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y
x'γy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	y	y	0	0	y	y	y	y	0	0
x'γy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	y	y	0	0	y	y	y	y	0	0
x'δy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	y	y	0	0	y	y	y	y
x'δy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0	y	y	0	0	y	y	y	y
γγy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0
γγy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0	0	0
γδy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0
γδy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y	0	0
δδy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y
δδy'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y	y

図2-5：*Y*マトリクス（Y，Y'，yは成分があることを意味する）

2-4で示した係数比較法とラプラス変換法で得られた結果にそれぞれ表2-3のような6種類のパラメータを与え，それから求められるx_{I}，x'_{I}，y_{I}，y'_{I}，x_{II}，x'_{II}，y_{II}，y'_{II}，x_{III}，x'_{III}，y_{III}，y'_{III}を比較したところ一致した。
このことから計算で得られたマトリクスが正しいといえる。

これまではx'，y'を使って計算してきたが他のイオン光学系の構成要素と組み合わせて計算するためにはα，βを使わなければならない。その場合(2-1)の関係式を使って変換すればよい。

表2-3：場のパラメータ

	円筒電場	トロイダル電場	均一磁場	不均一磁場	トロイダル電場＋均一磁場	トロイダル電場＋不均一磁場
λ_0	1	1	1	1	1	1
λ_1	-1/1.3	-1.5/1.3	0	0	-1.5/0.495	-1.5/0.495
λ_2	$1/1.3^2$	$1.125/1.3^2$	0	0	$1.125/0.495^2$	$1.125/0.495^2$
λ_3	$-1/1.3^3$	$-1.146/1.3^3$	0	0	$-1.146/0.495^3$	$-1.146/0.495^3$
μ_0	1	1	1	1	1	1
μ_1	0	0	0	-0.3/1.3	0	-0.3/0.495
μ_2	0	0	0	$1/1.3^2$	0	$1/0.495^2$
μ_3	0	0	0	$1.5/1.3^3$	0	$1.5/0.495^3$
h_e	1/1.3	1/1.3	0	0	1/1.3	1/1.3
h_m	0	0	1/1.3	1/1.3	1/0.8	1/0.8
h_0	1/1.3	1/1.3	1/1.3	1/1.3	1/0.495	1/0.495

第3章　重畳場の端縁場を通る荷電粒子の軌道計算

3-1　座標系，端縁場の分布

端縁場を通る荷電粒子の軌道は場の強度変化分布がわかっていれば運動方程式を積分することによって求めることができる。そのためにはまず端縁場の作る重畳場を求めなければならない。

端縁場では計算をしやすくするため中心軌道の半径ρ_0を単位とした直交座標系($\rho_0\xi$, $\rho_0\eta$, $\rho_0\zeta$)を用いることにする(図3-1)。場の端近辺のごく小さい範囲を計算の対象とするのでξ，η，ζは1次小の量とみなせる。

第2章の中心軌道に沿った座標系(x, y, z)と直交座標系($\rho_0\xi$, $\rho_0\eta$, $\rho_0\zeta$)との間には次のような関係がなりたつ。

$$
\begin{aligned}
&x=\rho_0\left(\sqrt{(1+\xi)^2+\eta^2}-1\right),\ y=\rho_0\zeta \\
&\cos(z/\rho_0)=\frac{1+\xi}{\sqrt{(1+\xi)^2+\eta^2}},\ \sin(z/\rho_0)=\frac{\eta}{\sqrt{(1+\xi)^2+\eta^2}}
\end{aligned}
\tag{3-1}
$$

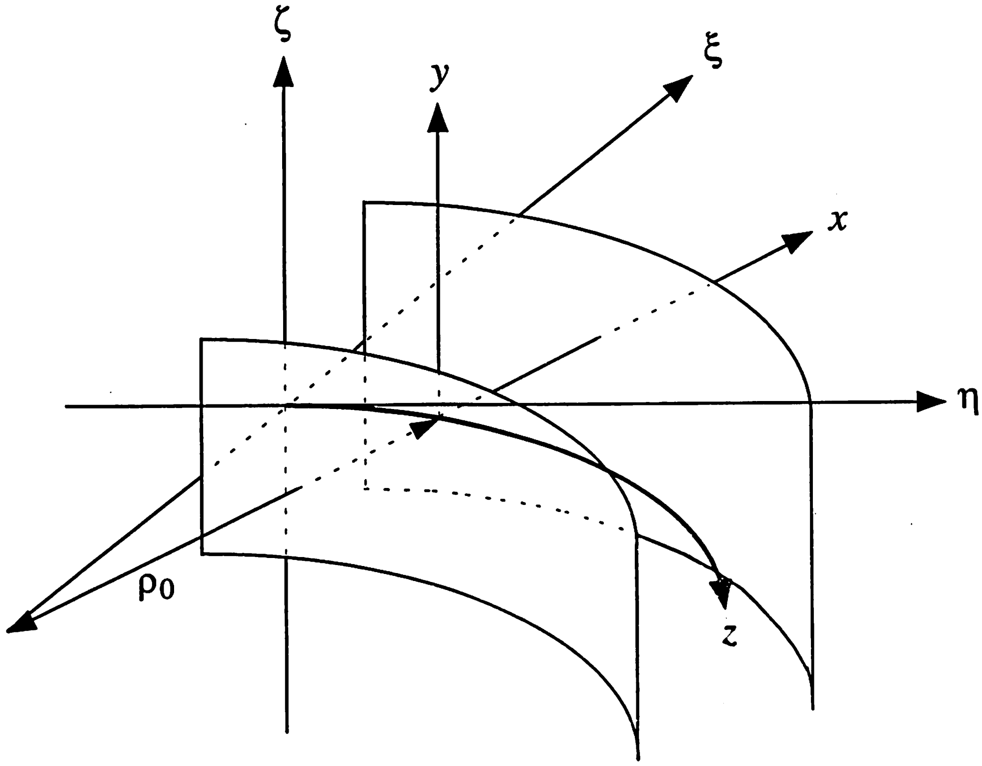


図3-1：端縁場の計算に用いる座標系

3-2　場の表現

以後の議論で現れる表現を簡単にするため次のような略号を導入する。

$$E=E(\eta),\ E'=\frac{\mathrm{d}E(\eta)}{\mathrm{d}\eta},\ E''=\frac{\mathrm{d}^2E(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2},\ E'''=\frac{\mathrm{d}^3E(\eta)}{\mathrm{d}\eta^3},\cdots\cdots$$
$$\int(\cdots)\mathrm{d}\eta=\int_{\eta_a}^{\eta}(\cdots)\mathrm{d}\eta,\ \int_a^b(\cdots)\mathrm{d}\eta=\int_{\eta_a}^{\eta_b}(\cdots)\mathrm{d}\eta \tag{3-2}$$
$$B=B(\eta),\ B'=\frac{\mathrm{d}B(\eta)}{\mathrm{d}\eta},\ B''=\frac{\mathrm{d}^2B(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2},\ B'''=\frac{\mathrm{d}^3B(\eta)}{\mathrm{d}\eta^3},\cdots\cdots$$

ηに関する

E', B'は-1次小，E'', B''は-2次小，E''', B'''は-3次小，……の大きさ，1階積分は1次小，2階積分は2次小，……の大きさの量とそれぞれみなせる。

3-2-1　電場

理想場の電場，ポテンシャルは第2章で求められた結果から2次までの近似で

$$E_x(x,y)=E_0\left\{\lambda_0+\lambda_1x+\lambda_2x^2-\tfrac{1}{2}\left(2\lambda_2+h_0\lambda_1-h_0^2\lambda_0\right)y^2\right\}$$
$$E_y(x,y)=E_0\left\{-\left(\lambda_1+h_0\lambda_0\right)y-\left(2\lambda_2+h_0\lambda_1-h_0^2\lambda_0\right)xy\right\}$$

$$\begin{aligned}\phi(x,y)=E_0\Big\{&\lambda_0x+\tfrac{1}{2}\lambda_1x^2-\tfrac{1}{2}\left(\lambda_1+h_0\lambda_0\right)y^2+\tfrac{1}{3}\lambda_2x^3\\&-\tfrac{1}{2}\left(2\lambda_2+h_0\lambda_1-h_0^2\lambda_0\right)xy^2\Big\}\end{aligned} \tag{3-3}$$

(3-1)の関係式を2次までの近似で表すと

$$\begin{aligned}&x=\rho_0\left(\xi+\tfrac{1}{2}\eta^2\right),\ y=\rho_0\zeta\\&\cos(z/\rho_0)=1-\tfrac{1}{2}\eta^2,\ \sin(z/\rho_0)=\eta-\xi\eta\end{aligned} \tag{3-4}$$

となるのでこの変換式を利用することによって(3-3)を直交座標系に変換す

ると理想場の電場，ポテンシャルは(理想場であることを示すため"ideal"を付ける)

$$
\begin{aligned}
E_\xi^{\text{ideal}}(\xi,\eta,\zeta) &= E_x(x,y)\cos(z/\rho_0)\\
&= E_0\left\{\lambda_0+\lambda_1\xi/h_0+\lambda_2\xi^2/h_0^2-\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0-\lambda_1)\eta^2/h_0\right.\\
&\quad\left.+\tfrac{1}{2}\left(h_0^2\lambda_0-h_0\lambda_1-2\lambda_2\right)\zeta^2/h_0^2\right\}
\end{aligned}
\tag{3-5}
$$

$$
\begin{aligned}
E_\eta^{\text{ideal}}(\xi,\eta,\zeta) &= E_x(x,y)\sin(z/\rho_0)=E_0\left\{\lambda_0\eta-(h_0\lambda_0-\lambda_1)\xi\eta/h_0\right\}\\
E_\zeta^{\text{ideal}}(\xi,\eta,\zeta) &= E_y(x,y)=E_0\left\{-(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta/h_0+\left(h_0^2\lambda_0-h_0\lambda_1-2\lambda_2\right)\xi\zeta/h_0^2\right\}\\
\phi^{\text{ideal}}(\xi,\eta,\zeta) &= -\rho_0E_0\left\{\lambda_0\xi+\tfrac{1}{2}\lambda_1\xi^2/h_0+\tfrac{1}{2}\lambda_0\eta^2-\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta^2/h_0\right\}
\end{aligned}
$$

電極の端の中心軌道の近傍では電極に平行な面（η-ζ面）に関して対称性があると考えられる。このときの電場は(3-5)で$\xi=0$と置いて

$$
\begin{aligned}
E_\xi^{\text{ideal}}(0,\eta,\zeta) &= E_0\left\{\lambda_0-\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0-\lambda_1)\eta^2/h_0+\tfrac{1}{2}\left(h_0^2\lambda_0-h_0\lambda_1-2\lambda_2\right)\zeta^2/h_0^2\right\}\\
E_\eta^{\text{ideal}}(0,\eta,\zeta) &= E_0\lambda_0\eta\\
E_\zeta^{\text{ideal}}(0,\eta,\zeta) &= -E_0\left\{(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta/h_0\right\}
\end{aligned}
\tag{3-6}
$$

ここで次のような特徴を持ったη軸上で定義される端縁電場の性質を表す関数$E(\eta)$を導入する。(図3-2)

1. 十分電場の内部に入った地点η_bで理想場の電場の強さE_0と一致する。($E(\eta_b)=E_0$)

2. 十分電場から離れた地点η_aで0になる。($E(\eta_a)=0$)

端縁場の電場を求めるためにまず(3-6)のE_0をEに置き換えると

$$
\begin{aligned}
E_\xi(0,\eta,\zeta) &= E\left\{\lambda_0-\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0-\lambda_1)\eta^2/h_0+\tfrac{1}{2}\left(h_0^2\lambda_0-h_0\lambda_1-2\lambda_2\right)\zeta^2/h_0^2\right\}\\
E_\eta(0,\eta,\zeta) &= E\lambda_0\eta\\
E_\zeta(0,\eta,\zeta) &= -E\left\{(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta/h_0\right\}
\end{aligned}
\tag{3-7}
$$

E(η)

さらに電極の境界が曲線でその曲率半径が$R_e=\rho_0 r_e$であるとすると(図3-3)この円の方程式は

$$
(\eta-r_e)^2+\zeta^2=r_e^2 \tag{3-8}
$$

であるのでηを

$$\cancel{\eta}-\left\{\sqrt{(\eta-r_e)^2+\zeta^2}-r_e\right\}=\eta-r_e\left\{\sqrt{(1-\eta/r_e)^2+(\zeta/r_e)^2}-1\right\} \tag{3-9}$$
$$\approx \eta-\tfrac{1}{2}\zeta^2/r_e-\tfrac{1}{2}\eta\zeta^2/r_e^2$$

に置き換えるとEは

$$E-\left(\tfrac{1}{2}\zeta^2/r_e+\tfrac{1}{2}\eta\zeta^2/r_e^2\right)E'+\left(\tfrac{1}{2}\zeta^2/r_e+\tfrac{1}{2}\eta\zeta^2/r_e^2\right)^2E''-\cdots \tag{3-10}$$

と展開でき，(3-7)は2次までの近似で

$$\begin{aligned}
E_\xi(0,\eta,\zeta)&=E\left\{\lambda_0-\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0-\lambda_1)\eta^2/h_0+\tfrac{1}{2}(h_0^2\lambda_0-h_0\lambda_1-2\lambda_2)\zeta^2/h_0^2\right\}\\
&\quad+E'\left\{-\tfrac{1}{2}\lambda_0\zeta^2/r_e-\tfrac{1}{2}\lambda_0\eta\zeta^2/r_e^2\right\}\\
E_\eta(0,\eta,\zeta)&=E\{\lambda_0\eta\}+E'\left\{-\tfrac{1}{2}\lambda_0\eta\zeta^2/r_e\right\}\\
E_\zeta(0,\eta,\zeta)&=E\left\{-(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta/h_0\right\}+E'\left\{\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta^3/(h_0r_e)\right\}
\end{aligned} \tag{3-11}$$

Maxwellの方程式(div$\boldsymbol{E}$=rot$\boldsymbol{E}$=0)を満たすように項を付け加えると

$$\begin{aligned}
E_\xi(0,\eta,\zeta)&=E\left\{\lambda_0-\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0-\lambda_1)\eta^2/h_0+\tfrac{1}{2}(h_0^2\lambda_0-h_0\lambda_1-2\lambda_2)\zeta^2/h_0^2\right\}\\
&\quad+E'\left\{-\tfrac{1}{2}\lambda_0\zeta^2/r_e-\tfrac{1}{2}\lambda_0\eta\zeta^2/r_e^2\right\}\\
E_\eta(0,\eta,\zeta)&=E\{\lambda_0\eta\}+E'\left\{-\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta^2/r_e-\tfrac{1}{2}\lambda_0\eta\zeta^2/r_e\right\}+E''\left\{-\tfrac{1}{4}\lambda_0\eta^2\zeta^2/r_e\right\}\\
E_\zeta(0,\eta,\zeta)&=E\left\{-(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta/h_0\right\}+E'\left\{-\tfrac{1}{2}\lambda_0\eta^2\zeta/r_e+\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta^3/(h_0r_e)\right\}
\end{aligned} \tag{3-12}$$

またη≧η_bで理想場と端縁場でポテンシャルが一致するためにはE_ηに

$$E'\left\{E_0^{-1}\int_a^b\int_{\eta_a}^{\eta}E\,d\eta\,d\eta-\tfrac{1}{2}\eta_b^2\right\}\equiv E'\cdot I_{e1} \tag{3-13}$$

を加えなければならない。結局η-ζ面での端縁電場は

$$\begin{aligned}
E_\xi(0,\eta,\zeta)&=E\left\{\lambda_0-\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0-\lambda_1)\eta^2/h_0+\tfrac{1}{2}(h_0^2\lambda_0-h_0\lambda_1-2\lambda_2)\zeta^2/h_0^2\right\}\\
&\quad+E'\left\{-\tfrac{1}{2}\lambda_0\zeta^2/r_e-\tfrac{1}{2}\lambda_0\eta\zeta^2/r_e^2\right\}\\
E_\eta(0,\eta,\zeta)&=E\{\lambda_0\eta\}+E'\left\{I_{e1}-\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta^2/h_0-\tfrac{1}{2}\lambda_0\eta\zeta^2/r_e\right\}\\
&\quad+E''\left\{-\tfrac{1}{4}\lambda_0\eta^2\zeta^2/r_e\right\}\\
E_\zeta(0,\eta,\zeta)&=E\left\{-(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta/h_0\right\}+E'\left\{-\tfrac{1}{2}\lambda_0\eta^2\zeta/r_e+\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta^3/(h_0r_e)\right\}
\end{aligned} \tag{3-14}$$

となる。再びMaxwellの方程式の関係を利用するとη-ζ面外の端縁電場，

ポテンシャルは1次小までの大きさをとるとそれぞれ

$$
\begin{aligned}
E_\xi(\xi,\eta,\zeta) = {} & E[\lambda_0+\lambda_1\xi/h_0]+E'\left[\tfrac{1}{2}\lambda_0\xi^2/r_e-\tfrac{1}{2}\lambda_0\zeta^2/r_e-\lambda_0\xi\eta\right] \\
& +E''\left[-I_{e1}\lambda_0\xi-\tfrac{1}{2}\lambda_0\xi^2+\tfrac{1}{6}(h_0\lambda_0-2\lambda_1)\xi^3/h_0+\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0+\lambda_1)\xi\zeta^2/h_0\right] \\
& +E'''\left[-\tfrac{1}{12}\lambda_0\xi^4/r_e+\tfrac{1}{6}\lambda_0\xi^3\eta+\tfrac{1}{4}\lambda_0\xi^2\zeta^2/r_e\right]+E''''\left[\tfrac{1}{6}\lambda_0 I_{e1}\xi^3+\tfrac{1}{24}\lambda_0\xi^4\right]
\end{aligned}
\tag{3-15}
$$

$$
\begin{aligned}
E_\eta(\xi,\eta,\zeta) = {} & E[\lambda_0\eta]+E'\left[\lambda_0 I_{e1}+\lambda_0\xi-\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0-\lambda_1)\xi^2/h_0-\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta^2/h_0\right] \\
& +E''\left[\tfrac{1}{6}\lambda_0\xi^3/r_e-\tfrac{1}{2}\lambda_0\xi^2\eta-\tfrac{1}{2}\lambda_0\xi\zeta^2/r_e\right] \\
& +E'''\left[-\tfrac{1}{2}\lambda_0 I_{e1}\xi^2-\tfrac{1}{6}\lambda_0\xi^3+\tfrac{1}{12}(h_0\lambda_0-\lambda_1)\xi^4/h_0+\tfrac{1}{4}(h_0\lambda_0+\lambda_1)\xi^2\zeta^2/h_0\right] \\
& +E''''\left[\tfrac{1}{24}\lambda_0\xi^4\eta\right]+E'''''\left[\tfrac{1}{24}\lambda_0 I_{e1}\xi^4+\tfrac{1}{120}\lambda_0\xi^5\right]
\end{aligned}
\tag{3-16}
$$

$$
\begin{aligned}
E_\zeta(\xi,\eta,\zeta) = {} & E[-(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta/h_0]+E'[-\lambda_0\xi\zeta/r_e]+E''\left[\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0+\lambda_1)\xi^2\zeta/h_0\right] \\
& +E'''\left[\tfrac{1}{6}\lambda_0\xi^3\zeta/r_e\right]
\end{aligned}
\tag{3-17}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi(\xi,\eta,\zeta) = {} & \rho_0\iint E\,d\eta\,d\eta-\rho_0\eta\int E\,d\eta+\rho_0 E\left[-I_{e1}-\lambda_0\xi-\tfrac{1}{2}\lambda_1\xi^2/h_0\right. \\
& \left.+\tfrac{1}{2}(h_0\lambda_0+\lambda_1)\zeta^2/h_0\right]+\rho_0 E'\left[-\tfrac{1}{6}\lambda_0\xi^3/r_e+\tfrac{1}{2}\lambda_0\xi^2\eta+\tfrac{1}{2}\lambda_0\xi\zeta^2/r_e\right] \\
& +\rho_0 E''\left[\tfrac{1}{2}\lambda_0 I_{e1}\xi^2+\tfrac{1}{6}\lambda_0\xi^3\right]
\end{aligned}
\tag{3-18}
$$

となる。

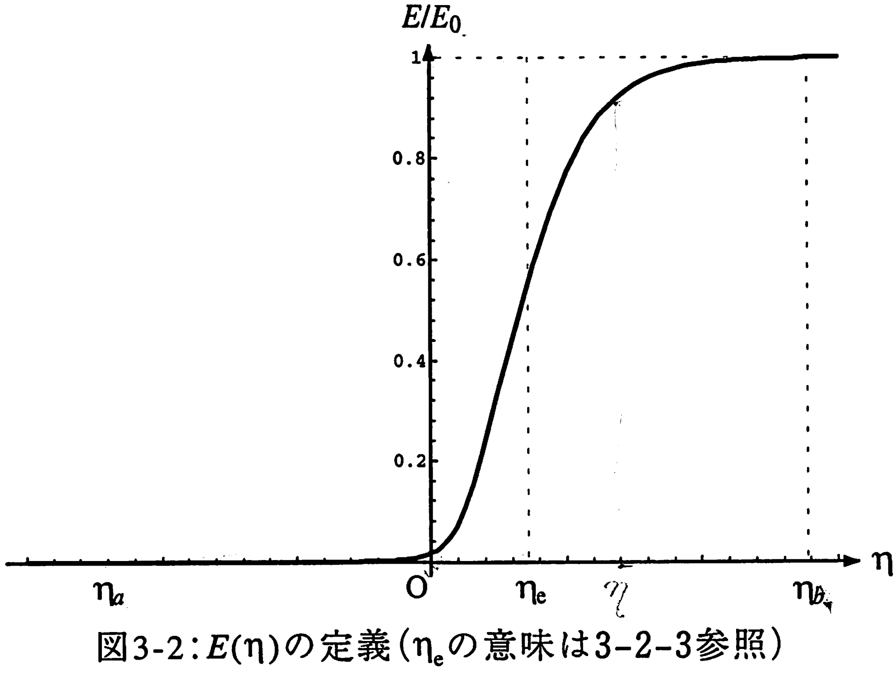


図3-2：$E(\eta)$の定義（η_eの意味は3-2-3参照）

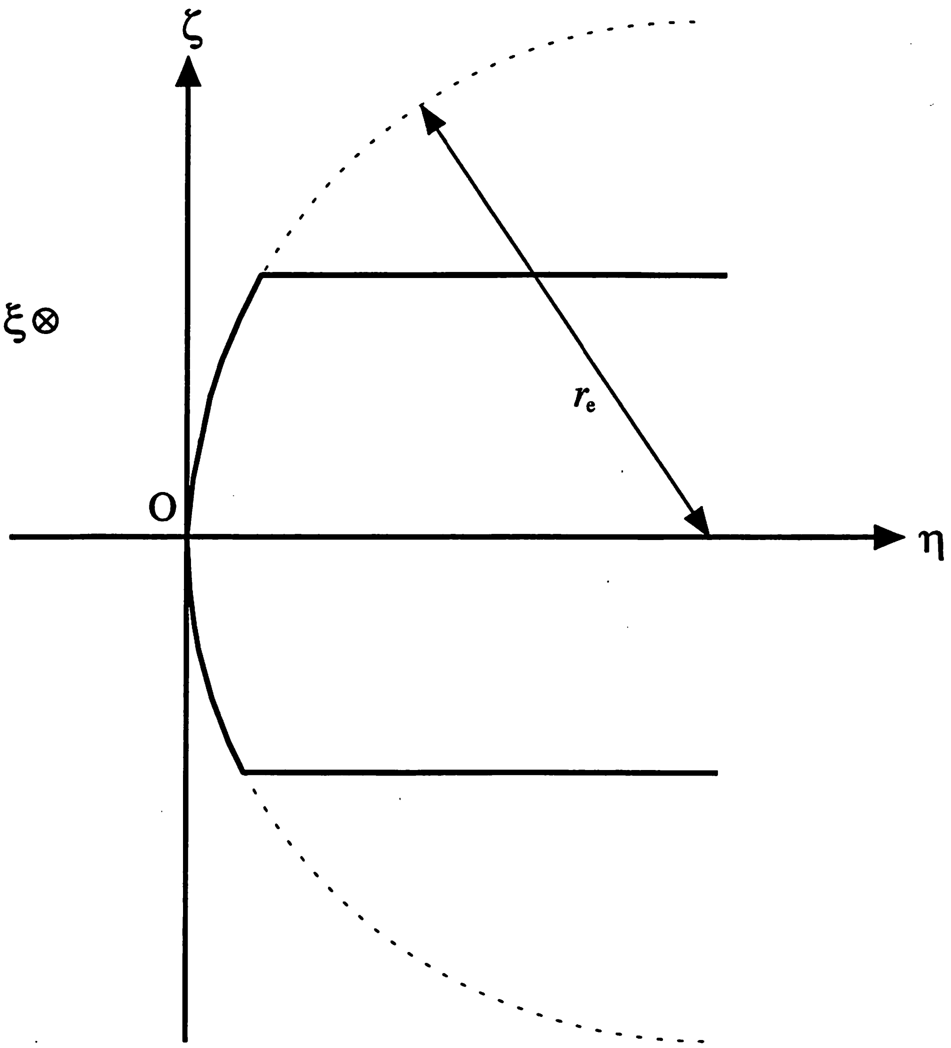


図3-3：曲がりを持った電極の境界(横から見た図)

3-2-2 磁場

磁場の端縁場も電場のときと同様にして求められるので簡単に述べる。

理想場の磁場は第2章で求められた結果から2次まで取ると

$$B_x(x,y)=B_0\{\mu_1 y+2\mu_2 xy\}$$
$$B_y(x,y)=B_0\{\mu_0+\mu_1 x+\mu_2 x^2-(\tfrac{1}{2}h_0\mu_1+\mu_2)y^2\} \tag{3-19}$$

これらを(3-4)の変換式を用いて直交座標系に変換すると

$$B_\xi^{\mathrm{ideal}}(\xi,\eta,\zeta)=B_x(x,y)\cos(z/\rho_0)=B_0\{\mu_1\zeta/h_0+2\mu_2\xi\zeta/h_0^2\}$$
$$B_\eta^{\mathrm{ideal}}(\xi,\eta,\zeta)=B_x(x,y)\sin(z/\rho_0)=B_0\{\mu_1\eta\zeta/h_0\}$$
$$B_\zeta^{\mathrm{ideal}}(\xi,\eta,\zeta)=B_y(x,y) \tag{3-20}$$
$$=B_0\{\mu_0+\mu_1\xi/h_0+\mu_2\xi^2/h_0^2+\tfrac{1}{2}\mu_1\eta^2/h_0-\tfrac{1}{2}(h_0\mu_1+2\mu_2)\zeta^2/h_0^2\}$$

電場のときと同じように端縁磁場の特徴を表す$E(\eta)$と同様の性質を持った関数$B(\eta)$を導入すると(図3-4)対称面であるξ-η面上では

$$B_\xi(\xi,\eta,0)=0,\ B_\eta(\xi,\eta,0)=0$$
$$B_\zeta(\xi,\eta,0)=B\{\mu_0+\mu_1\xi/h_0+\mu_2\xi^2/h_0^2+\tfrac{1}{2}\mu_1\eta^2/h_0\} \tag{3-21}$$

さらに磁極の境界の曲率半径が$R_m=\rho_0 r_m$であるとしてBを展開すると(図3-5)

$$B-(\tfrac{1}{2}\xi^2/r_m+\tfrac{1}{2}\eta\xi^2/r_m^2)B'+(\tfrac{1}{2}\xi^2/r_m+\tfrac{1}{2}\eta\xi^2/r_m^2)^2B''-\cdots \tag{3-22}$$

となるので(3-21)は

$$B_\xi(\xi,\eta,\zeta)=0$$
$$B_\eta(\xi,\eta,\zeta)=0$$
$$B_\zeta(\xi,\eta,\zeta)=B\{\mu_0+\mu_1\xi/h_0+\mu_2\xi^2/h_0^2+\tfrac{1}{2}\mu_1\eta^2/h_0\} \tag{3-23}$$
$$+B'\{-\tfrac{1}{2}\mu_0\xi^2/r_m-\tfrac{1}{2}\mu_0\xi^2\eta/r_m^2-\tfrac{1}{2}\mu_1\xi^3/(h_0r_m)\}+B''\{\tfrac{1}{8}\mu_0\xi^4/r_m^2\}$$

Maxwellの方程式(div$\boldsymbol{B}$=0, rot$\boldsymbol{B}$=0)を満たすように中心面外($\zeta\neq0$)の磁

場を1次小の項まで求めると

$$B_\xi(\xi,\eta,\zeta)=B\left[\mu_1\zeta/h_0\right]+B'\left[-\mu_0\xi\zeta/r_m\right]+B''\left[\tfrac{1}{6}\mu_1\zeta^3/h_0\right]$$
$$B_\eta(\xi,\eta,\zeta)=B'\left[\mu_0\zeta+\mu_1\xi\zeta/h_0\right]+B''\left[-\tfrac{1}{2}\mu_0\xi^2\zeta/r_m+\tfrac{1}{6}\mu_0\zeta^3/r_m\right]+B'''\left[-\tfrac{1}{6}\mu_0\zeta^3\right] \qquad (3\text{-}24)$$
$$B_\zeta(\xi,\eta,\zeta)=B\left[\mu_0+\mu_1\xi/h_0\right]+B'\left[-\tfrac{1}{2}\mu_0\xi^2/r_m+\tfrac{1}{2}\mu_0\zeta^2/r_m\right]$$
$$+B''\left[-\tfrac{1}{2}\mu_0\zeta^2-\tfrac{1}{2}\mu_1\xi\zeta^2/h_0\right]$$

となる。

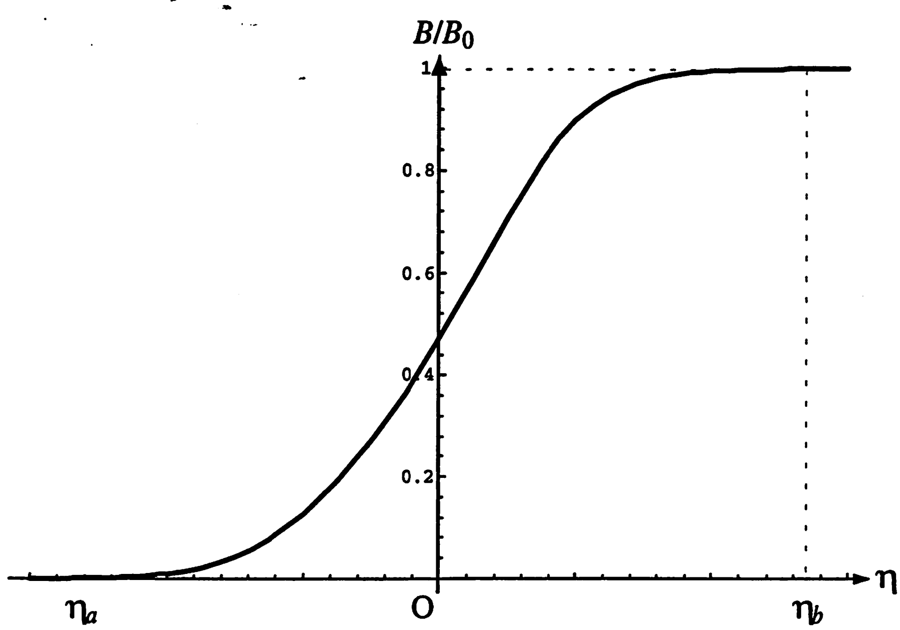


図3-4：$B(\eta)$の定義

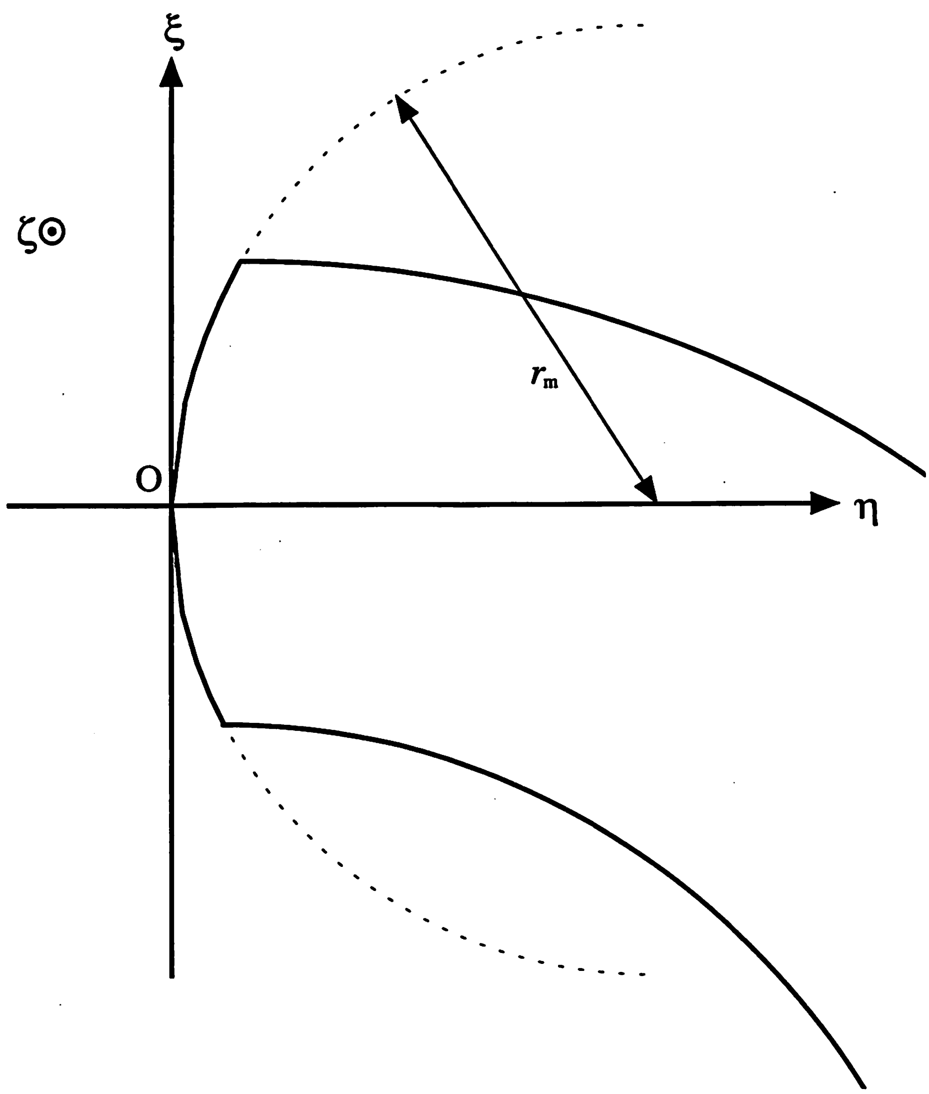


図3-5：曲がりを持った磁極の境界（上から見た図）

3-2-3　理想境界

端縁場を通る粒子の軌道はη_a，η_bの範囲について計算すれば求められるが，自由空間($\eta \leqq \eta_a$)，端縁場($\eta_a \leqq \eta < \eta_b$)，理想場($\eta_b \leqq \eta$)と順に計算していくためには$\eta_a$，$\eta_b$を決めなければならないので面倒である。そのかわり，端縁場の領域に理想境界と呼ばれる仮想的な境界面を考え，理想境界より前では自由空間と同じ直線軌道を描き，後では電場や磁場と同じ円軌道を通るとし，端縁場の影響を理想境界に集約することにする。つまりあたかも理想境界で軌道が突然不連続的に位置や角度が変わると考えるのである。

ところで重畳場の場合一般に電場と磁場ではそれぞれの持つ理想境界は異なる。そこで磁場，電場の理想境界をそれぞれη=0の面(図3-2)，η=η_eの面(図3-4)とする。
このとき

$$\int_a^b E\,d\eta = E_0(\eta_b - \eta_e),\ \int_a^b B\,d\eta = B_0\eta_b \tag{3-25}$$

の関係式が成り立つ。η_eの定義は[10]に準拠したものである。

3-3　運動方程式の導出と解

3-3-1　運動方程式

第2章では相対論的影響を考慮した運動量p(2-10)とフェルマーの変分原理(2-11)を出発点にして軌道を求めていった。またその過程で相対論的影響に由来する値ε，N，Mが現れた（定義は(2-18)）。

端縁場中の軌道を求めるために[10]では

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}=\frac{e}{pv}\left(\frac{v}{\dot{z}}\right)^2\left(E_x-x'E_z\right)+\frac{e}{p}\left(\frac{v}{\dot{z}}\right)\left\{x'y'B_x-\left(1+x'^2\right)B_y+y'B_z\right\}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}=\frac{e}{pv}\left(\frac{v}{\dot{z}}\right)^2\left(E_y-y'E_z\right)+\frac{e}{p}\left(\frac{v}{\dot{z}}\right)\left\{\left(1+y'^2\right)B_x-x'y'B_y-x'B_z\right\}$$

（ただしこの式と次の式の(x, y, z)は直交座標系である）

と(2-10)のpを使い，軌道は次の式から求める。

$$\alpha=\alpha_a+\int_{z_a}^{z}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z\,,\ \beta=\beta_a+\int_{z_a}^{z}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z$$

$$x=x_a+\int_{z_a}^{z}\alpha\,\mathrm{d}z\,,\ y=y_a+\int_{z_a}^{z}\beta\,\mathrm{d}z$$

この章では相対論的効果は無視し，以下に述べるように運動方程式とvとξ，η，ζの関係式を使って軌道を求めることにする。また[10]では斜め入射も考慮されているがここでは直角入射に限定する。

第2章と同様，中心軌道を通る荷電粒子の質量，エネルギー，電荷，速度をそれぞれm_0，U_0，e，v_0とする。任意の粒子については次のようになる。

$$m=m_0(1+\gamma)\,,\ U=U_0(1+\delta)\,,\ \tfrac{1}{2}mv^2=U-e\phi(\xi,\eta,\zeta) \tag{3-26}$$

運動方程式は

$$m\ddot{\xi}/h_0=eE_\xi+e\left(\dot{\eta}B_\zeta-\dot{\zeta}B_\eta\right)/h_0 \tag{3-27}$$

$$m\ddot{\zeta}/h_0=eE_\zeta+e\left(\dot{\xi}B_\eta-\dot{\eta}B_\xi\right)/h_0 \tag{3-28}$$

また図3-6のように角度を取るとvとξ，η，ζの関係はそれぞれ

$$\dot{\xi}/h_0 = v\cos\beta\sin\alpha \tag{3-29}$$

$$\dot{\eta}/h_0 = v\cos\beta\cos\alpha \tag{3-30}$$

$$\dot{\zeta}/h_0 = v\sin\beta \tag{3-31}$$

(3-30)より

$$d\eta = h_0 v\cos\beta\cos\alpha\, dt \tag{3-32}$$

なので(3-27)，(3-28)にそれぞれ(3-29)，(3-31)を代入してtで積分すると

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \dot{\xi}_a + \frac{h_0 e}{m}\int\left(E_\xi + B_\zeta v\cos\beta\cos\alpha - B_\eta v\sin\beta\right)dt \\ &= \dot{\xi}_a + \frac{e}{m}\int\left\{\frac{E_\xi}{v\cos\beta\cos\alpha} + B_\zeta - \frac{B_\eta\tan\beta}{\cos\alpha}\right\}d\eta\end{aligned} \tag{3-33}$$

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= \dot{\zeta}_a + \frac{h_0 e}{m}\int\left(E_\zeta + B_\eta v\cos\beta\sin\alpha - B_\xi v\cos\beta\cos\alpha\right)dt \\ &= \dot{\zeta}_a + \frac{e}{m}\int\left\{\frac{E_\zeta}{v\cos\beta\cos\alpha} + B_\eta\tan\alpha - B_\xi\right\}d\eta\end{aligned} \tag{3-34}$$

よって$\sin\alpha$，$\sin\beta$はそれぞれ

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \dot{\xi}/(h_0 v\cos\beta) \\ &= \frac{v_a\cos\beta_a\sin\alpha_a}{v\cos\beta} + \frac{e}{h_0 m v\cos\beta}\int\left\{\frac{E_\xi}{v\cos\beta\cos\alpha} + B_\zeta - \frac{B_\eta\tan\beta}{\cos\alpha}\right\}d\eta\end{aligned} \tag{3-35}$$

$$\begin{aligned}\sin\beta &= \dot{\zeta}/(h_0 v) \\ &= \frac{v_a\sin\beta_a}{v} + \frac{e}{h_0 m v}\int\left\{\frac{E_\zeta}{v\cos\beta\cos\alpha} + B_\eta\tan\alpha - B_\xi\right\}d\eta\end{aligned} \tag{3-36}$$

またξ，ζは(3-29)，(3-31)を積分すると求められ，

$$\xi = \xi_a + \int h_0 v\cos\beta\sin\alpha\, dt = \xi_a + \int\tan\alpha\, d\eta \tag{3-37}$$

$$\zeta = \zeta_a + \int h_0 v\sin\beta\, dt = \zeta_a + \int\frac{\tan\beta}{\cos\alpha}d\eta \tag{3-38}$$

下つき文字の"a"はη_aにおける値であることを意味する。

(3-35), (3-36)で現れる$1/v$を(3-18), (3-26)を利用して1次近似で求めると

$$(1/v)_{\mathrm{I}} = (1/v_0)\left\{1 - \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\gamma + (E/E_0)\lambda_0\xi - \tfrac{1}{6}(E''/E_0)\lambda_0\xi^3\right\} \tag{3-39}$$

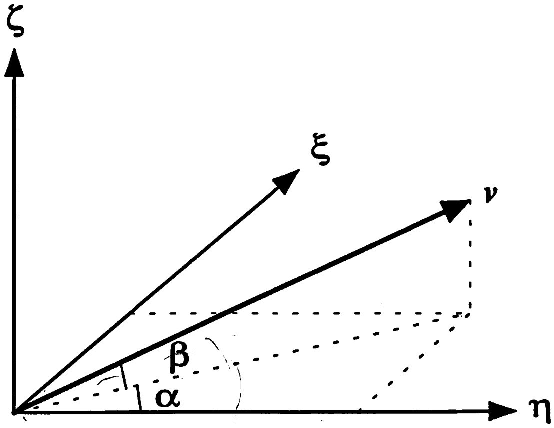


図3-6:端縁場の計算に使う角度の定義(vは速度)

3-3-2　近似解

理想場のときのように逐次近似法を使って軌道を求める。すなわちすでに求めた次数のξ，ζ，$\sin\alpha$，$\sin\beta$および電場(3-15)～(3-17)と磁場(3-24)を(3-35)～(3-38)に代入して計算することによって1つ高い次数のξ，ζ，$\sin\alpha$，$\sin\beta$を得る。荷電粒子は$\eta<\eta_a$の領域では場の影響が無いため直線の軌道を描くと考えられる。仮にこの直線を~~$\zeta=0$~~ $\eta=0$の面まで延長したとすると，直線はη軸にたいしてα_a，β_aの角度を持っているので(ξ_1，ζ_1)で交差するとすると

$$\xi_1=\xi_a-\eta_a\tan\alpha\,,\ \zeta_1=\zeta_a-\eta_a\tan\beta \tag{3-40}$$

の関係がある。以後の計算では(ξ_a，ζ_a)の代わりに(ξ_1，ζ_1)を使うことにする。

(1)　1次近似

0次近似解として次の値を置く。

$$\begin{aligned}&\xi_o=0\,,\ \zeta_o=0\,,\ (\sin\alpha)_o=0\,,\ (\sin\beta)_o=0\\&(1/\cos\alpha)_o=1\,,\ (1/\cos\beta)_o=1\,,\ (\tan\alpha)_o=0\,,\ (\tan\beta)_o=0\end{aligned} \tag{3-41}$$

これらを(3-15)，(3-17)，(3-24)，(3-39)の0次小の大きさを持った項

$$\begin{aligned}&E_\xi(\xi,\eta,\zeta)_o=E\lambda_0+E''\left[-\tfrac{1}{2}\lambda_0\xi^2\right]+E''''\left[\tfrac{1}{24}\lambda_0\xi^4\right],\ E_\zeta(\xi,\eta,\zeta)_o=0\\&B_\xi(\xi,\eta,\zeta)_o=0\,,\ B_\eta(\xi,\eta,\zeta)_o=B'[\mu_0\zeta]+B'''\left[-\tfrac{1}{6}\mu_0\zeta^3\right]\\&B_\zeta(\xi,\eta,\zeta)_o=B\mu_0+B''\left[-\tfrac{1}{2}\mu_0\zeta^2\right],\ (1/v)_o=1/v_0\end{aligned} \tag{3-42}$$

に代入し，さらに(3-42)を(3-35)～(3-38)に代入することにより1次解は容易に求められ

$$\begin{aligned}&(\sin\alpha)_\mathrm{I}=\alpha_a-\frac{h_\mathrm{e}\lambda_0}{h_0E_0}\left(\int E\,\mathrm{d}\eta\right)-\frac{h_\mathrm{m}\mu_0}{h_0B_0}\left(\int B\,\mathrm{d}\eta\right)+\frac{h_\mathrm{e}\lambda_0E'}{2h_0E_0}\xi^2+\frac{h_\mathrm{m}\mu_0B'}{2h_0B_0}\zeta^2\\&(\sin\beta)_\mathrm{I}=\beta_a\\&\xi_\mathrm{I}=\xi_1\\&\zeta_\mathrm{I}=\zeta_1\end{aligned} \tag{3-43}$$

また

$$(1/\cos\alpha)_{\mathrm{I}} = \cancel{0},\ (1/\cos\beta)_{\mathrm{I}} = \cancel{0},\ (\tan\alpha)_{\mathrm{I}} = (\sin\alpha)_{\mathrm{I}},\ (\tan\beta)_{\mathrm{I}} = (\sin\beta)_{\mathrm{I}} \qquad (3\text{-}44)$$

である。

(2) 2次近似

(1)と同様，1次近似解を使って2次解を求めることができる。ただし$\sin\alpha$を計算するときには積分される項に含まれる(3-15)，(3-24)の

$$E''\left[-\tfrac{1}{2}\lambda_0\xi^2\right],\ E''''\left[\tfrac{1}{24}\lambda_0\xi^4\right],\ B''\left[-\tfrac{1}{2}\mu_0\zeta^2\right] \qquad (3\text{-}45)$$

の次数に注意しなければならない。なぜならばこれらにξ_{I}，ζ_{I}をそのまま代入すると項の次数はいずれも0次になってしまい，積分しても2次近似の影響が現れないからである。よって(3-45)の項を1次小にするためにはξ^2，ξ^4，ζ^2はそれぞれ3次，5次，3次まで求める必要がある。

ξ，ζの2次近似は(3-37)，(3-38)より

$$\xi_{\mathrm{II}} = \xi_{\mathrm{I}} + \alpha_a\eta - \frac{h_{\mathrm{e}}\lambda_0}{h_0E_0}\left(\iint E\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\eta\right) - \frac{h_{\mathrm{m}}\mu_0}{h_0B_0}\left(\iint B\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\eta\right) + \frac{h_{\mathrm{e}}\lambda_0E}{2h_0E_0}\xi^2 + \frac{h_{\mathrm{m}}\mu_0B}{2h_0B_0}\zeta^2 \qquad (3\text{-}46)$$

$$\zeta_{\mathrm{II}} = \zeta_{\mathrm{I}} + \beta_a\eta$$

よって

$$\begin{aligned}(\xi^2)_{\mathrm{III}} &= \xi_{\mathrm{I}}^2 - 2\left\{\frac{h_{\mathrm{e}}\lambda_0}{h_0E_0}\left(\iint E\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\eta\right) + \frac{h_{\mathrm{m}}\mu_0}{h_0B_0}\left(\iint B\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\eta\right)\right\}\xi_{\mathrm{I}} + 2\alpha_a\xi_{\mathrm{I}}\eta \\ &\quad + \frac{h_{\mathrm{e}}\lambda_0E}{h_0E_0}\xi_{\mathrm{I}}^3 + \frac{h_{\mathrm{m}}\mu_0B}{h_0B_0}\xi_{\mathrm{I}}\zeta_{\mathrm{I}}^2 \qquad (3\text{-}47) \\ (\xi^4)_{\mathrm{V}} &= -4\left\{\frac{h_{\mathrm{e}}\lambda_0}{h_0E_0}\left(\iint E\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\eta\right) + \frac{h_{\mathrm{m}}\mu_0}{h_0B_0}\left(\iint B\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\eta\right)\right\}\xi_{\mathrm{I}}^3\end{aligned}$$

$$(\zeta^2)_{\mathrm{III}} = \zeta_{\mathrm{I}}^2 + 2\beta_a\zeta_{\mathrm{I}}\eta \qquad (3\text{-}48)$$

これにより$\sin\alpha$，$\sin\beta$を(3-35)，(3-36)から2次近似で計算できる。

結局η_bにおけるξ，ζ，$\sin\alpha$，$\sin\beta$の2次近似解は計算結果に$\eta=\eta_b$を代入することにより求められ，

$$(\xi_b)_{\mathrm{II}} = \xi_1 + \alpha_a\eta_b - (h_{\mathrm{e}}\lambda_0/h_0)\left\{\tfrac{1}{2}(\eta_b - \eta_{\mathrm{e}})^2 + I_{\mathrm{e1}}\right\} - (h_{\mathrm{m}}\mu_0/h_0)\left(\tfrac{1}{2}\eta_b^2 + I_{\mathrm{m1}}\right) + \tfrac{1}{2}(h_{\mathrm{e}}\lambda_0/h_0)\xi_1^2 + \tfrac{1}{2}(h_{\mathrm{m}}\mu_0/h_0)\zeta_1^2 \tag{3-49}$$

$$(\zeta_b)_{\mathrm{II}} = \zeta_1 + \beta_a\eta_b \tag{3-50}$$

$$\begin{aligned}(\sin\alpha_b)_{\mathrm{II}} = {}& \alpha_a - (h_{\mathrm{e}}\lambda_0/h_0)(\eta_b - \eta_{\mathrm{e}}) - (h_{\mathrm{m}}\mu_0/h_0)\eta_b + \tfrac{1}{2}(h_{\mathrm{m}}\mu_0/h_0)\eta_b\gamma + \left\{\tfrac{1}{2}(h_{\mathrm{m}}\mu_0/h_0)\eta_b\right.\\ &\left.+ (h_{\mathrm{e}}\lambda_0/h_0)(\eta_b - \eta_{\mathrm{e}})\right\}\delta + \left[(h_{\mathrm{e}}\lambda_0/h_0)\eta_{\mathrm{e}} - \cancel{(h_{\mathrm{e}}\lambda_1/h_0^2)(\eta_b - \eta_{\mathrm{e}})} - (h_{\mathrm{m}}\mu_1/h_0^2)\eta_b\right.\\ &\left. - 2(h_{\mathrm{e}}^2\lambda_0^2/h_0^2)(\eta_b - \eta_{\mathrm{e}} + I_{\mathrm{e2}}) - (h_{\mathrm{e}}h_{\mathrm{m}}\lambda_0\mu_0/h_0^2)(\eta_b - j\eta_{\mathrm{e}} + I_{\mathrm{c2}})\right]\xi_1\\ &+ \tfrac{1}{2}\left\{h_{\mathrm{e}}\lambda_0/(h_0 r_{\mathrm{e}}) - h_{\mathrm{m}}\mu_0/(h_0 r_{\mathrm{m}})\right\}(\zeta_1^2 - \xi_1^2) - \left\{\tfrac{4}{3}(h_{\mathrm{e}}^2\lambda_0^2/h_0^2)I_{\mathrm{e3}}\right.\\ &\left.+ \tfrac{1}{6}(h_{\mathrm{e}}h_{\mathrm{m}}\lambda_0\mu_0/h_0^2)I_{\mathrm{c3}}\right\}\xi_1^3 - \tfrac{1}{2}(h_{\mathrm{e}}h_{\mathrm{m}}\lambda_0\mu_0/h_0^2)I_{\mathrm{c3}}\,\xi_1\zeta_1^2\end{aligned} \tag{3-51}$$

$$\begin{aligned}(\sin\beta_b)_{\mathrm{II}} = {}& \beta_a + \left[\left\{h_{\mathrm{e}}(h_0\lambda_0 + \lambda_1)/h_0^2\right\}(\eta_b - \eta_{\mathrm{e}}) + (h_{\mathrm{m}}\mu_1/h_0^2)\eta_b - (h_{\mathrm{m}}^2\mu_0^2/h_0^2)I_{\mathrm{m2}}\right.\\ &\left. - (h_{\mathrm{e}}h_{\mathrm{m}}\lambda_0\mu_0/h_0^2)\left\{(1-j)\eta_{\mathrm{e}} + I_{\mathrm{c2}}\right\}\right]\zeta_1 + (h_{\mathrm{e}}\lambda_0/h_0)\beta_a\xi_1 - (h_{\mathrm{m}}\mu_0/h_0)\alpha_a\zeta_1\\ &+ \left\{h_{\mathrm{e}}\lambda_0/(h_0 r_{\mathrm{e}}) - h_{\mathrm{m}}\mu_0/(h_0 r_{\mathrm{m}})\right\}\xi_1\zeta_1 - \tfrac{1}{2}(h_{\mathrm{e}}h_{\mathrm{m}}\lambda_0\mu_0/h_0^2)I_{\mathrm{c3}}\,\xi_1^2\zeta_1\\ &- \left\{\tfrac{2}{3}(h_{\mathrm{m}}^2\mu_0^2/h_0^2)I_{\mathrm{m3}} + \tfrac{1}{6}(h_{\mathrm{e}}h_{\mathrm{m}}\lambda_0\mu_0/h_0^2)I_{\mathrm{c3}}\right\}\zeta_1^3\end{aligned} \tag{3-52}$$

ここで

$$\begin{aligned}&I_{\mathrm{e1}} \equiv E_0^{-1}\int_a^b\!\!\int E\,d\eta\,d\eta - \tfrac{1}{2}(\eta_b - \eta_{\mathrm{e}})^2,\ I_{\mathrm{e2}} \equiv E_0^{-2}\int_a^b E^2\,d\eta - (\eta_b - \eta_{\mathrm{e}}),\\ &I_{\mathrm{e3}} \equiv E_0^{-2}\int_a^b (E')^2\,d\eta,\ I_{\mathrm{m1}} \equiv B_0^{-1}\int_a^b\!\!\int B\,d\eta\,d\eta - \tfrac{1}{2}\eta_b^2,\ I_{\mathrm{m2}} \equiv B_0^{-2}\int_a^b B^2\,d\eta - \eta_b,\\ &I_{\mathrm{m3}} \equiv B_0^{-2}\int_a^b (B')^2\,d\eta,\ I_{\mathrm{c2}} \equiv B_0^{-1}E_0^{-1}\int_a^b BE\,d\eta - (\eta_b - j\eta_{\mathrm{e}}),\ I_{\mathrm{c3}} \equiv B_0^{-1}E_0^{-1}\int_a^b B'E'\,d\eta\end{aligned} \tag{3-53}$$

でそれぞれI_{e}は電場，I_{m}は磁場，I_{c}は重畳場の端縁場の分布に由来する定積分を含んだ定数である。

またjは磁場と電場の理想境界の位置が違うことに起因する定数で$\eta_{\mathrm{e}}\geq 0$のとき1，$\eta_{\mathrm{e}}<0$のとき0である。

3-4　マトリクス表示

理想場と同様端縁場においてもマトリクス表示で表すことにする。

3-4-1　理想境界

前に述べた理想境界$\eta=0$の前後における位置，角度の変化を表すマトリクスを求める。理想境界の自由空間側の値には"1"の添字，重畳場側の値には"2"の添字を付けることにする。ξ_1，ζ_1については(3-40)の関係が成立し，また自由空間内では角度は変化しないので

$$\alpha_1=\alpha_a\,,\ \beta_1=\beta_a \tag{3-54}$$

である。

まず中心軌道について考える。中心軌道では$\xi_1=\zeta_1=\alpha_1=\beta_1=\gamma=\delta=0$なので$\eta=\eta_b$における値は

$$\begin{aligned}
\xi_{b0}&=-(h_e\lambda_0/h_0)\left\{\tfrac{1}{2}(\eta_b-\eta_e)^2+I_{e1}\right\}-(h_m\mu_0/h_0)\left(\tfrac{1}{2}\eta_b^2+I_{m1}\right)\\
\zeta_{b0}&=0\\
\sin\alpha_{b0}&=-(h_e\lambda_0/h_0)(\eta_b-\eta_e)-(h_m\mu_0/h_0)\eta_b\\
\sin\beta_{b0}&=0
\end{aligned}\tag{3-55}$$

これが理想境界と交わる点を求めるには$\eta=\eta_b$から理想場を通ってきたと仮定したときの軌道(理想軌道)に沿って$\eta=0$まで後戻りしなければならないが，単に$\eta_b=0$と置けば求められ，

$$\begin{aligned}
\xi_{20}&=-(h_e\lambda_0/h_0)\left\{\tfrac{1}{2}\eta_e^2+I_{e1}\right\}-(h_m\mu_0/h_0)I_{m1}\\
\zeta_{20}&=0\\
\sin\alpha_{20}&=(h_e\lambda_0/h_0)\eta_e\\
\sin\beta_{20}&=0
\end{aligned}\tag{3-56}$$

よって中心軌道は理想境界において

$$\begin{aligned}
\Delta\xi&=0-\xi_{20}=(h_e\lambda_0/h_0)\left\{\tfrac{1}{2}\eta_e^2+I_{e1}\right\}+(h_m\mu_0/h_0)I_{m1}\\
\Delta\alpha&=0-\alpha_{20}=-(h_e\lambda_0/h_0)\eta_e\\
\Delta\zeta&=0\,,\ \Delta\beta=0
\end{aligned}\tag{3-57}$$

のずれ，曲がりを受ける。(図3-7)

任意の軌道でも理想境界で(3-57)の変化を受けるのであらためて

$$\xi_1 \to \xi_1 + \Delta\xi,\ \alpha_1 \to \alpha_1 + \Delta\alpha \tag{3-58}$$

と置き換えて(3-49)～(3-52)に代入し，η_b=0とすると

$$\xi_2 = \xi_1 + \tfrac{1}{2}(h_e\lambda_0/h_0)\xi_1^2 + \tfrac{1}{2}(h_m\mu_0/h_0)\zeta_1^2 \tag{3-59}$$

$$\zeta_2 = \zeta_1 \tag{3-60}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha_2 = \alpha_1 &- \left[(h_e\lambda_0/h_0)\eta_e\right]\delta + \left[\left\{h_e(h_0\lambda_0+\lambda_1)/h_0^2\right\}\eta_e + 2\left(h_e^2\lambda_0^2/h_0^2\right)(\eta_e - I_{e2}) + \right.\\ &\left.\left(h_e h_m\lambda_0\mu_0/h_0^2\right)(j\eta_e - I_{c2})\right]\xi_1 + \tfrac{1}{2}\left[h_m\mu_0/(h_0 r_m) - h_e\lambda_0/(h_0 r_e)\right]\xi_1^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}\left[h_e\lambda_0/(h_0 r_e) - h_m\mu_0/(h_0 r_m)\right]\zeta_1^2\end{aligned} \tag{3-61}$$

$$\begin{aligned}\sin\beta_2 = \beta_1 &+ \left[-\left\{h_e(h_0\lambda_0+\lambda_1)/h_0^2\right\}\eta_e - \left(h_m^2\mu_0^2/h_0^2\right)I_{m2} + \left(h_e h_m\lambda_0\mu_0/h_0^2\right)(j\eta_e - I_{c2})\right]\zeta_1 \\ &+ \left[h_e\lambda_0/(h_0 r_e) - h_m\mu_0/(h_0 r_m)\right]\xi_1\zeta_1 + (h_e\lambda_0/h_0)\xi_1\beta_1 - (h_m\mu_0/h_0)\alpha_1\zeta_1\end{aligned} \tag{3-62}$$

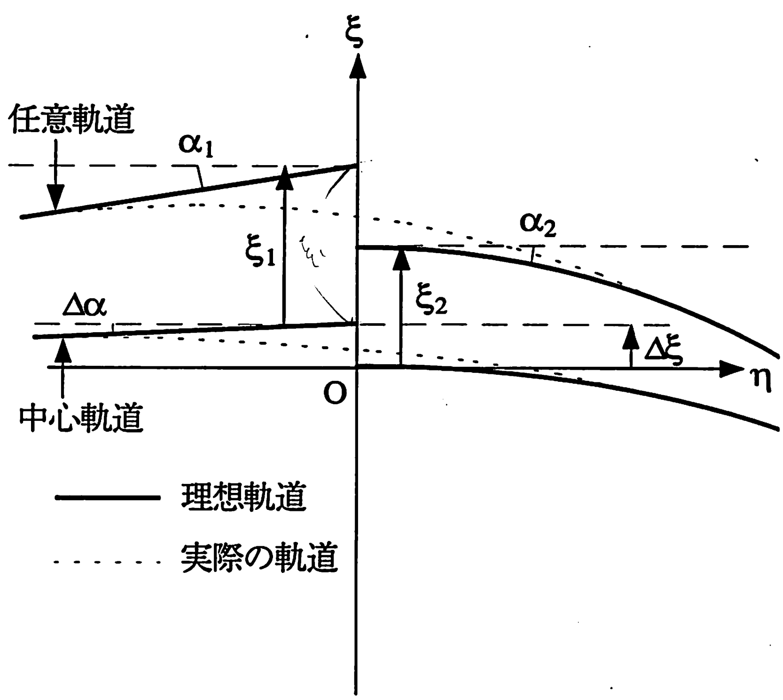


図3-7：理想境界面(η=0)での軌道の変化

3-4-2　マトリクス表現

第2章と表記を統一するために$(\rho_0\xi,\ \rho_0\eta,\ \rho_0\zeta)$の座標系を$(x,\ y,\ z)$に戻す。3-2では広い範囲の場を変換するために(3-4)の変換式を用いたがもはや計算の対象は理想境界をはさんだごくせまい領域に限られているので単に次のような式を使う。

$$\xi_1 = h_0 x_1\,,\ \xi_2 = h_0 x_2\,,\ \zeta_1 = h_0 y_1\,,\ \zeta_2 = h_0 y_2 \qquad (3\text{-}63)$$
$$\eta_e = h_0 z_e\,,\ \eta_a = h_0 z_a\,,\ \eta_b = h_0 z_b\,,\ r_e = h_0 R_e\,,\ r_m = h_0 R_m$$

またI_{e2}, I_{m2}, I_{c2}は次のように改めて定義する。

$$I_{e2} \equiv E_0^{-2}\int_{z_a}^{z_b} E^2\,\mathrm{d}z - (z_b - z_e),\ I_{m2} \equiv B_0^{-2}\int_{z_a}^{z_b} B^2\,\mathrm{d}z - z_b\,, \qquad (3\text{-}64)$$
$$I_{c2} \equiv B_0^{-1}E_0^{-1}\int_{z_a}^{z_b} BE\,\mathrm{d}z - (z_b - j z_e)$$

すると(3-59)～(3-62)はそれぞれ(後に現れる出射側の定数と区別するためR, I, z, jに"in"の上付き文字を付ける)

$$x_2 = x_1 + \tfrac{1}{2}h_e\lambda_0\,x_1^2 + \tfrac{1}{2}h_m\mu_0\,y_1^2 \qquad (3\text{-}65)$$

$$y_2 = y_1 \qquad (3\text{-}66)$$

$$\sin\alpha_2 = \alpha_1 + \left[h_e(h_0\lambda_0+\lambda_1)z_e^{in} + 2h_e^2\lambda_0^2\left(z_e^{in} - I_{e2}^{in}\right) + h_e h_m \lambda_0\mu_0\left(j^{in}z_e^{in} - I_{c2}^{in}\right)\right]x_1 \qquad (3\text{-}67)$$
$$-h_e\lambda_0 z_e^{in}\delta + \tfrac{1}{2}\left[h_m\mu_0/R_m^{in} - h_e\lambda_0/R_e^{in}\right]x_1^2 + \tfrac{1}{2}\left[h_e\lambda_0/R_e^{in} - h_m\mu_0/R_m^{in}\right]y_1^2$$

$$\sin\beta_2 = \beta_1 + \left[-h_e(h_0\lambda_0+\lambda_1)z_e^{in} - h_m^2\mu_0^2 I_{m2}^{in} + h_e h_m\lambda_0\mu_0\left(j^{in}z_e^{in} - I_{c2}^{in}\right)\right]y_1 \qquad (3\text{-}68)$$
$$+\left[h_e\lambda_0/R_e^{in} - h_m\mu_0/R_m^{in}\right]x_1 y_1 + h_e\lambda_0\,x_1\beta_1 - h_m\mu_0\,\alpha_1 y_1$$

となるのでこれらを

$$x_2 = X_{1x}x_1 + X_{1\alpha}\alpha_1 + X_{1\gamma}\gamma + X_{1\delta}\delta + X_{1xx}x_1^2 + X_{1x\alpha}x_1\alpha_1 + X_{1x\gamma}x_1\gamma + X_{1x\delta}x_1\delta$$
$$+X_{1\alpha\alpha}\alpha_1^2 + X_{1\alpha\gamma}\alpha_1\gamma + X_{1\alpha\delta}\alpha_1\delta + X_{1\gamma\gamma}\gamma^2 + X_{1\gamma\delta}\gamma\delta + X_{1\delta\delta}\delta^2 \qquad (3\text{-}69)$$
$$+X_{1yy}y_1^2 + X_{1y\beta}y_1\beta_1 + X_{1\beta\beta}\beta_1^2$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 = {} & X'_{1x} x_1 + X'_{1\alpha}\alpha_1 + X'_{1\gamma}\gamma + X'_{1\delta}\delta + X'_{1xx}x_1^2 + X'_{1x\alpha}x_1\alpha_1 + X'_{1x\gamma}x_1\gamma + X'_{1x\delta}x_1\delta \\
& + X'_{1\alpha\alpha}\alpha_1^2 + X'_{1\alpha\gamma}\alpha_1\gamma + X'_{1\alpha\delta}\alpha_1\delta + X'_{1\gamma\gamma}\gamma^2 + X'_{1\gamma\delta}\gamma\delta + X'_{1\delta\delta}\delta^2 \\
& + X'_{1yy}y_1^2 + X'_{1y\beta}y_1\beta_1 + X'_{1\beta\beta}\beta_1^2
\end{aligned}
\tag{3-70}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 = {} & Y_{1y}y_1 + Y_{1\beta}\beta_1 + Y_{1xy}x_1y_1 + Y_{1x\beta}x_1\beta_1 + Y_{1\alpha y}\alpha_1 y_1 + Y_{1\alpha\beta}\alpha_1\beta_1 + Y_{1\gamma y}\gamma y_1 + Y_{1\gamma\beta}\gamma\beta_1 \\
& + Y_{1\delta y}\delta y_1 + Y_{1\delta\beta}\delta\beta_1
\end{aligned}
\tag{3-71}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_2 = {} & Y'_{1y}y_1 + Y'_{1\beta}\beta_1 + Y'_{1xy}x_1y_1 + Y'_{1x\beta}x_1\beta_1 + Y'_{1\alpha y}\alpha_1 y_1 + Y'_{1\alpha\beta}\alpha_1\beta_1 + Y'_{1\gamma y}\gamma y_1 + Y'_{1\gamma\beta}\gamma\beta_1 \\
& + Y'_{1\delta y}\delta y_1 + Y'_{1\delta\beta}\delta\beta_1
\end{aligned}
\tag{3-72}
$$

と置くと0でない成分は

$$
X_{1x} = 1,\ X_{1xx} = \tfrac{1}{2}h_e\lambda_0,\ X_{1yy} = \tfrac{1}{2}h_m\mu_0,\ Y_{1y} = 1 \tag{3-73}
$$

$$
\begin{aligned}
& X'_{1\alpha} = 1,\ X'_{1x} = h_e(h_0\lambda_0 + \lambda_1)z_e^{in} + 2h_e^2\lambda_0^2\left(z_e^{in} - I_{e2}^{in}\right) + h_e h_m \lambda_0 \mu_0\left(j^{in} z_e^{in} - I_{c2}^{in}\right), \\
& X'_{1\delta} = -h_e\lambda_0 z_e^{in},\ X'_{1xx} = \tfrac{1}{2}\left(h_m\mu_0/R_m^{in} - h_e\lambda_0/R_e^{in}\right),\ X'_{1yy} = \tfrac{1}{2}\left(h_e\lambda_0/R_e^{in} - h_m\mu_0/R_m^{in}\right) \\
& Y'_{1\beta} = 1,\ Y'_{1y} = -h_e(h_0\lambda_0 + \lambda_1)z_e^{in} - h_m^2\mu_0^2 I_{m2}^{in} + h_e h_m\lambda_0\mu_0\left(j^{in} z_e^{in} - I_{c2}^{in}\right) \\
& Y'_{1xy} = h_e\lambda_0/R_e^{in} - h_m\mu_0/R_m^{in},\ Y'_{1x\beta} = h_e\lambda_0,\ Y'_{1\alpha y} = -h_m\mu_0
\end{aligned}
\tag{3-74}
$$

となり,

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= \boldsymbol{X}\vec{x}_0 \\
\vec{y} &= \boldsymbol{Y}\vec{y}_0
\end{aligned}
\tag{3-75}
$$

と置くと第2章と同様に端縁場入射のマトリクス$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$は図3-8,9のように表される。

ただし

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= \{x, \alpha, \gamma, \delta, xx, x\alpha, x\gamma, x\delta, \alpha\alpha, \alpha\gamma, \alpha\delta, \gamma\gamma, \gamma\delta, \delta\delta, yy, y\beta, \beta\beta\} \\
\vec{y} &= \{y, \beta, xy, x\beta, \alpha y, \alpha\beta, \gamma y, \gamma\beta, \delta y, \delta\beta\}
\end{aligned}
\tag{3-76}
$$

	x	α	γ	δ	xx	$x\alpha$	$x\gamma$	$x\delta$	$\alpha\alpha$	$\alpha\gamma$	$\alpha\delta$	$\gamma\gamma$	$\gamma\delta$	$\delta\delta$	yy	$y\beta$	$\beta\beta$
x	1	0	0	0	X_{xx}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X_{yy}	0	0
α	X'_x	1	0	X'_δ	X'_{xx}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X'_{yy}	0	0
γ	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
δ	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xx	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x\alpha$	0	0	0	0	X'_x	1	0	X'_δ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x\gamma$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x\delta$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\alpha\alpha$	0	0	0	0	X'^2_x	$2X'_x$	0	$2X'_\delta X'_x$	1	0	$2X'_\delta$	0	0	X'^2_δ	0	0	0
$\alpha\gamma$	0	0	0	0	0	0	X'_x	0	0	1	0	0	X'_δ	0	0	0	0
$\alpha\delta$	0	0	0	0	0	0	0	X'_x	0	0	1	0	0	X'_δ	0	0	0
$\gamma\gamma$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$\gamma\delta$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$\delta\delta$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
yy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$y\beta$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y'_y	1	0
$\beta\beta$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y'^2_y	$2Y'_y$	1

図3-8：端縁場入射のXマトリクス

	y	β	xy	$x\beta$	αy	$\alpha\beta$	γy	$\gamma\beta$	δy	$\delta\beta$
y	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
β	Y'_y	1	Y'_{xy}	$Y'_{x\beta}$	$Y'_{\alpha y}$	0	0	0	0	0
xy	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$x\beta$	0	0	Y'_y	1	0	0	0	0	0	0
αy	0	0	X'_x	0	1	0	0	0	X'_δ	0
$\alpha\beta$	0	0	$X'_x Y'_y$	X'_x	Y'_y	1	0	0	$X'_\delta Y'_y$	X'_δ
γy	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$\gamma\beta$	0	0	0	0	0	0	Y'_y	1	0	0
δy	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$\delta\beta$	0	0	0	0	0	0	0	0	Y'_y	1

図3-9：端縁場入射のYマトリクス

[10]の結果(29,30)で$\varepsilon_0=0$(相対論的効果を無視)，$\cos\theta=1$, $\tan\theta=0$(直角入射)としたものと今回得られた結果(3-73,74)を比較する。すると(3-74)のY'_{1y}([10]では$R(\beta/y)$)の一部に

$-h_e h_m \lambda_0 \mu_0 \left(I_{c2}^{in} - j^{in} z_e^{in}\right)$　本論文

$-h_e h_m \lambda_0 \mu_0 \left\{IC_1 + (1-j) z_e\right\}$　文献[10]

の違いがあることがわかった。(IC_1はI_{c2}^{in}と同じ定義)

この違いは，端縁場の影響を理想境界をはさんだ変換に集約する過程が本論文の3-4-1と[10]で異なっていることが原因であると考えられる。すなわち前者は中心軌道から理想境界での位置，角度のずれ(3-57)を求め，それを任意の軌道に適用し変換を導出しているのに対して，後者は変換を導出してから，それを元にして理想境界での位置，角度のずれを求めているという違いがある。しかし方法の違いによって結果が異なる理由を解明することはできていない。

今までは入口側の端縁場についてのみ考えてきたが重畳場から自由空間への出口側の端縁場でも同様に考えることができる。端縁場の出射は逆方向(-z方向)の軌道を通ったときの端縁場の入射と等価であり，対称性から角度は逆になる。

したがって理想境界の自由空間側の値には"4"の添字，重畳場側の値には"3"の添字を付けることにすれば

$$
\begin{array}{l}
x_1 \to x_4\,,\ \alpha_1 \to -\alpha_4\,,\ y_1 \to y_4\,,\ \beta_1 \to -\beta_4 \\
x_2 \to x_3\,,\ \alpha_2 \to -\alpha_3\,,\ y_2 \to y_3\,,\ \beta_2 \to -\beta_3
\end{array}
\qquad (3\text{-}77)
$$

の置き換えによって入射で用いた式をそのまま使うことができる。

すると$(x_3, y_3, \alpha_3, \beta_3)$と$(x_4, y_4, \alpha_4, \beta_4)$は

$$
\begin{array}{l}
\vec{x}_3 = \boldsymbol{X}\vec{x}_4 \\
\vec{y}_3 = \boldsymbol{Y}\vec{y}_4
\end{array}
\qquad (3\text{-}78)
$$

の関係にあるので$(x_3, y_3, \alpha_3, \beta_3)$から$(x_4, y_4, \alpha_4, \beta_4)$へ変換するマトリクスは図3-8,9の逆行列を求めることによって得られる。

すなわち

$$
\begin{aligned}
x_4 = {} & X_{3x} x_3 + X_{3\alpha}\alpha_3 + X_{3\gamma}\gamma + X_{3\delta}\delta + X_{3xx} x_3^2 + X_{3x\alpha} x_3\alpha_3 + X_{3x\gamma} x_3\gamma + X_{3x\delta} x_3\delta \\
& + X_{3\alpha\alpha}\alpha_3^2 + X_{3\alpha\gamma}\alpha_3\gamma + X_{3\alpha\delta}\alpha_3\delta + X_{3\gamma\gamma}\gamma^2 + X_{3\gamma\delta}\gamma\delta + X_{3\delta\delta}\delta^2 \\
& + X_{3yy} y_3^2 + X_{3y\beta} y_3\beta_3 + X_{3\beta\beta}\beta_3^2
\end{aligned}
\tag{3-79}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_4 = {} & X'_{3x} x_3 + X'_{3\alpha}\alpha_3 + X'_{3\gamma}\gamma + X'_{3\delta}\delta + X'_{3xx} x_3^2 + X'_{3x\alpha} x_3\alpha_3 + X'_{3x\gamma} x_3\gamma + X'_{3x\delta} x_3\delta \\
& + X'_{3\alpha\alpha}\alpha_3^2 + X'_{3\alpha\gamma}\alpha_3\gamma + X'_{3\alpha\delta}\alpha_3\delta + X'_{3\gamma\gamma}\gamma^2 + X'_{3\gamma\delta}\gamma\delta + X'_{3\delta\delta}\delta^2 \\
& + X'_{3yy} y_3^2 + X'_{3y\beta} y_3\beta_3 + X'_{3\beta\beta}\beta_3^2
\end{aligned}
\tag{3-80}
$$

$$
\begin{aligned}
y_4 = {} & Y_{3y} x_3 + Y_{3\beta}\beta_3 + Y_{3xy} x_3 y_3 + Y_{3x\beta} x_3\beta_3 + Y_{3\alpha y}\alpha_3 y_3 + Y_{3\alpha\beta}\alpha_3\beta_3 + Y_{3\gamma y}\gamma y_3 + Y_{3\gamma\beta}\gamma\beta_3 \\
& + Y_{3\delta y}\delta y_3 + Y_{3\delta\beta}\delta\beta_3
\end{aligned}
\tag{3-81}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_4 = {} & Y'_{3y} x_3 + Y'_{3\beta}\beta_3 + Y'_{3xy} x_3 y_3 + Y'_{3x\beta} x_3\beta_3 + Y'_{3\alpha y}\alpha_3 y_3 + Y'_{3\alpha\beta}\alpha_3\beta_3 + Y'_{3\gamma y}\gamma y_3 + Y'_{3\gamma\beta}\gamma\beta_3 \\
& + Y'_{3\delta y}\delta y_3 + Y'_{3\delta\beta}\delta\beta_3
\end{aligned}
\tag{3-82}
$$

と置くと2次までの近似で(出射側であることを示すためR, I, z, jには"out"の上付き文字を付ける)

$$
X_{3x} = 1,\ X_{3xx} = -\tfrac{1}{2} h_{\mathrm{e}}\lambda_0,\ X_{3yy} = -\tfrac{1}{2} h_{\mathrm{m}}\mu_0,\ Y_{3y} = 1 \tag{3-83}
$$

$$
\begin{aligned}
& X'_{3\alpha} = 1,\ X'_{3x} = h_{\mathrm{e}}(h_0\lambda_0 + \lambda_1) z_{\mathrm{e}}^{\mathrm{out}} + 2h_{\mathrm{e}}^2\lambda_0^2\left(z_{\mathrm{e}}^{\mathrm{out}} - I_{\mathrm{e2}}^{\mathrm{out}}\right) + h_{\mathrm{e}} h_{\mathrm{m}}\lambda_0\mu_0\left(j^{\mathrm{out}} z_{\mathrm{e}}^{\mathrm{out}} - I_{\mathrm{c2}}^{\mathrm{out}}\right), \\
& X'_{3\delta} = -h_{\mathrm{e}}\lambda_0 z_{\mathrm{e}}^{\mathrm{out}},\ X'_{3xx} = \tfrac{1}{2}\left(h_{\mathrm{m}}\mu_0 / R_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}} - h_{\mathrm{e}}\lambda_0 / R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{out}}\right), \\
& X'_{3yy} = \tfrac{1}{2}\left(h_{\mathrm{e}}\lambda_0 / R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{out}} - h_{\mathrm{m}}\mu_0 / R_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}}\right), \\
& Y'_{3\beta} = 1,\ Y'_{3y} = -h_{\mathrm{e}}(h_0\lambda_0 + \lambda_1) z_{\mathrm{e}}^{\mathrm{out}} - h_{\mathrm{m}}^2\mu_0^2 I_{\mathrm{m2}}^{\mathrm{out}} + h_{\mathrm{e}} h_{\mathrm{m}}\lambda_0\mu_0\left(j^{\mathrm{out}} z_{\mathrm{e}}^{\mathrm{out}} - I_{\mathrm{c2}}^{\mathrm{out}}\right), \\
& Y'_{3xy} = h_{\mathrm{e}}\lambda_0 / R_{\mathrm{e}}^{\mathrm{out}} - h_{\mathrm{m}}\mu_0 / R_{\mathrm{m}}^{\mathrm{out}},\ Y'_{3x\beta} = -h_{\mathrm{e}}\lambda_0,\ Y'_{3\alpha y} = h_{\mathrm{m}}\mu_0
\end{aligned}
\tag{3-84}
$$

となる。よって端縁場を考慮した場全体のマトリクス$\boldsymbol{X}$は入射側の端縁場，第2章で求められる場の本体，出射側の端縁場のマトリクスをそれぞれ$\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$とすると

$$
\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_3 \cdot \boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{X}_1 \tag{3-85}
$$

と表される。

第4章　応用例

第2章，第3章で計算した結果に実際に数値をあてはめる。ただし端縁場は2次までしか計算されていないので3次項についてはそれを考慮しないときに限定する。

4-1　均一磁場

中心軌道が図4-1のような均一磁場と自由空間を組み合わせたイオン光学系(90度扇型磁場)を考える。このとき端縁場は図4-2のようになっているとする。P_0からイオンが

$$|\alpha_0| \leq 0.005\mathrm{rad},\ |\beta_0| \leq 0.005\mathrm{rad},\ \gamma = 0,\ \delta = 0 \tag{4-1}$$

という条件で出射し，P_1，P_2，P_3，P_4を経由してP_fに到達するとする。またP_0でのスリット幅はx方向，y方向ともに100μmとする。

このとき到達点P_fにおけるx成分は

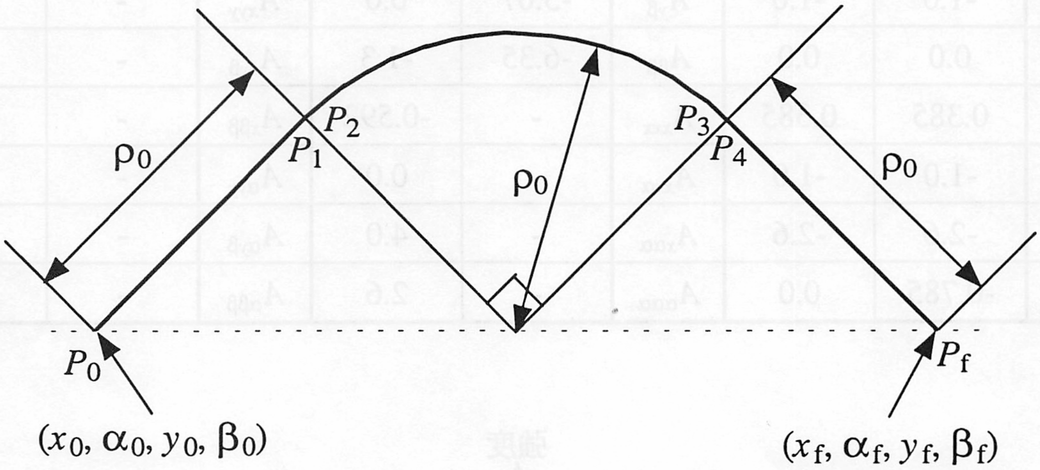
$$\begin{aligned} x_f = {} & A_x x_0 + A_\alpha \alpha_0 + A_{xx} x_0^2 + A_{x\alpha} x_0 \alpha_0 + A_{\alpha\alpha} \alpha_0^2 + A_{yy} y_0^2 + A_{y\beta} y_0 \beta_0 + A_{\beta\beta} \beta_0^2 \\ & + A_{xxx} x_0^3 + A_{xx\alpha} x_0^2 \alpha_0 + A_{x\alpha\alpha} x_0 \alpha_0^2 + A_{\alpha\alpha\alpha} \alpha_0^3 + A_{xyy} x_0 y_0^2 + A_{xy\beta} x_0 y_0 \beta_0 + A_{x\beta\beta} x_0 \beta_0^2 \\ & + A_{\alpha yy} \alpha_0 y_0^2 + A_{\alpha y\beta} \alpha_0 y_0 \beta_0 + A_{\alpha\beta\beta} \alpha_0 \beta_0^2 \end{aligned} \tag{4-2}$$

で表される。各係数は表4-1のようになる。(ただし$I_{\mathrm{m2}}^{\mathrm{in}} = I_{\mathrm{m2}}^{\mathrm{out}} = -0.0167$)

P_fに到達したイオンがx方向につくる像を図4-3に示す。A_α=0なのでA点でx方向の角度を持っていてもD点に集まる(方向収束)条件を満たしている。このため図4-3Aではピークの幅がスリット幅と同程度である。しかしαに関する高次の項$A_{\alpha\alpha}$，$A_{\alpha\alpha\alpha}$が0でないため，図4-3Bを見れば明らかなように実際には広がりが見られる。また端縁場の影響を考慮したとき，$A_{\beta\beta}$は考慮しないときと比較してかなり大きな値になる。その結果像の形に大きな違いが見られる(図4-3C)。

次にα_0の条件のみを$|\alpha_0| \leqq 0.05$radに変更した場合を図4-4に示す。図から明らかなようにα_0が大きくなると高次項の影響がそれだけ大きくなり，イ

オン像が歪むことがわかる。高感度装置を設計するにあたってはこういった高次項の影響を消すことが肝要であり，それを評価するにはこのような計算が重要な働きをする。



P_0 $(x_0,\ \alpha_0,\ y_0,\ \beta_0)$
↓　入射側の自由空間
P_1 $(x_1,\ \alpha_1,\ y_1,\ \beta_1)$
↓　入射側の端縁場
P_2 $(x_2,\ \alpha_2,\ y_2,\ \beta_2)$
↓　均一磁場
P_3 $(x_3,\ \alpha_3,\ y_3,\ \beta_3)$
↓　出射側の端縁場
P_4 $(x_4,\ \alpha_4,\ y_4,\ \beta_4)$
↓　出射側の自由空間
P_f $(x_f,\ \alpha_f,\ y_f,\ \beta_f)$

図4-1：90度均一磁場のイオン光学系(ρ_0=1.3m)

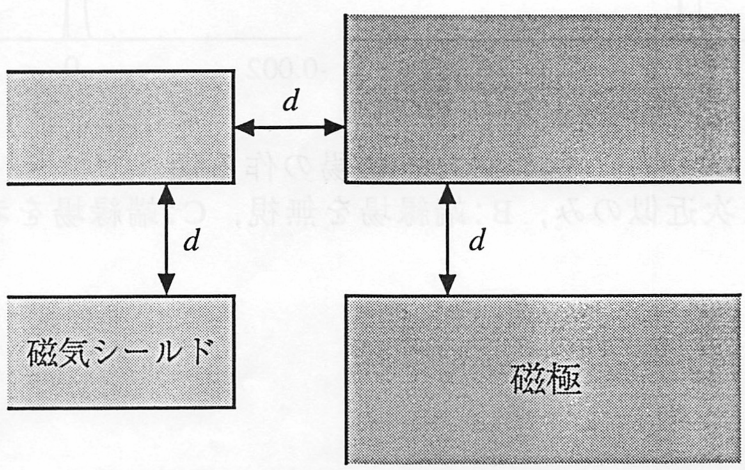


図4-2：90度均一磁場の端縁場(d=3.25cm)

表4-1:90度均一磁場のイオン光学系のマトリクス要素

	端縁場あり	端縁場なし		端縁場あり	端縁場なし		端縁場あり	端縁場なし
A_x	-1.0	-1.0	$A_{y\beta}$	-3.67	0.0	A_{xyy}	-	0
A_α	0.0	0.0	$A_{\beta\beta}$	-6.35	-1.3	$A_{xy\beta}$	-	0
A_{xx}	0.385	0.385	A_{xxx}	-	-0.592	$A_{x\beta\beta}$	-	2.0
$A_{x\alpha}$	-1.0	-1.0	$A_{xx\alpha}$	-	0.0	$A_{\alpha yy}$	-	0
$A_{\alpha\alpha}$	-2.6	-2.6	$A_{x\alpha\alpha}$	-	4.0	$A_{\alpha y\beta}$	-	0
A_{yy}	-0.785	0.0	$A_{\alpha\alpha\alpha}$	-	2.6	$A_{\alpha\beta\beta}$	-	1.3

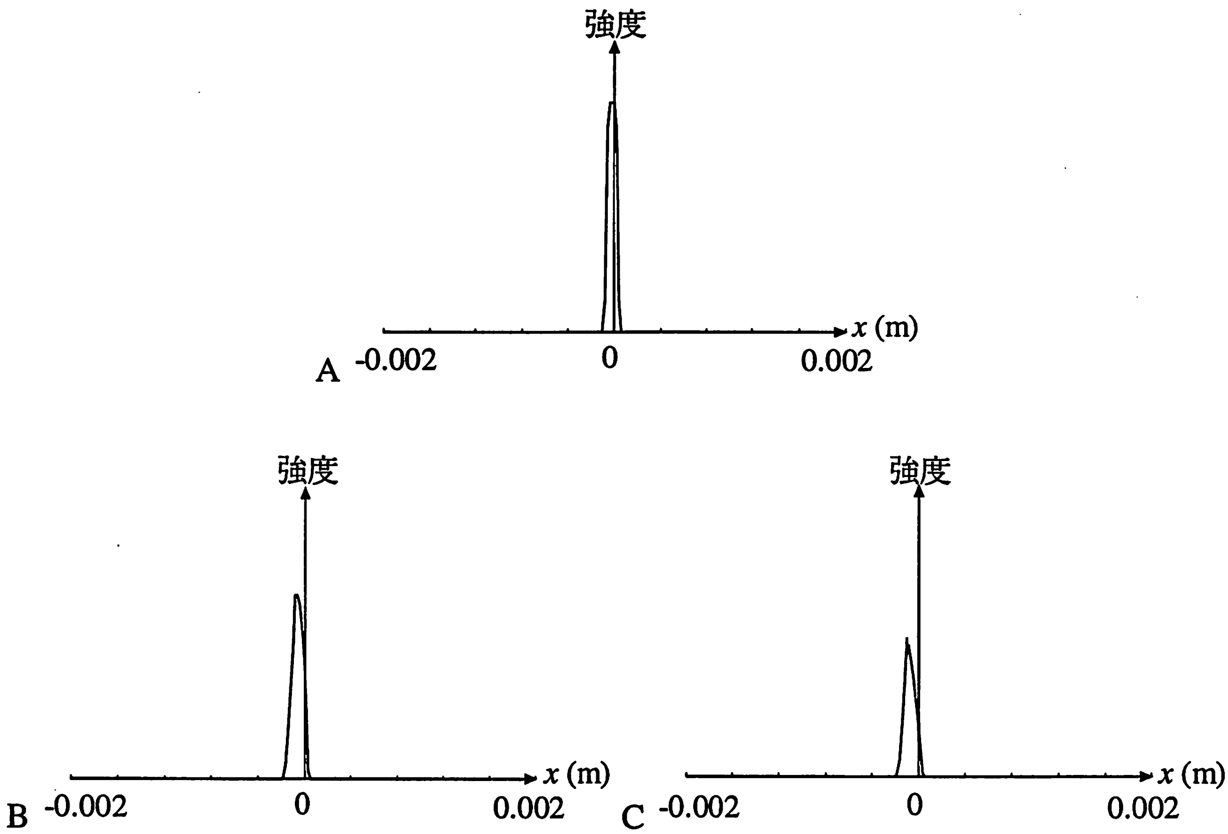


図4-3:均一磁場の作る像
A:1次近似のみ, B:端縁場を無視, C:端縁場を考慮

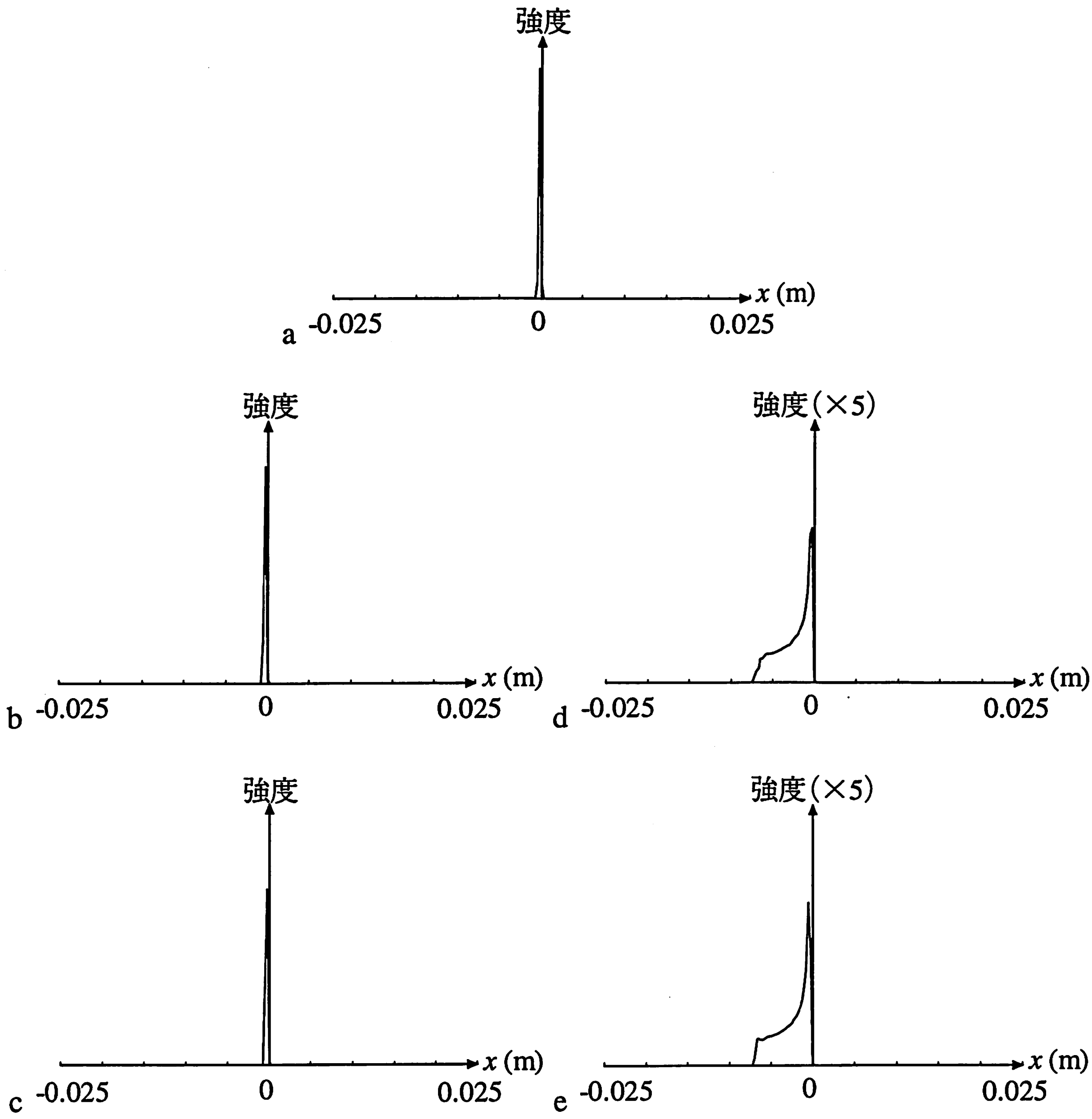


図4-4:均一磁場の作る像

a:1次近似のみ

b:端縁場を無視，$|\alpha_0| \leqq 0.005$rad

c:端縁場を考慮，$|\alpha_0| \leqq 0.005$rad

d:端縁場を無視，$|\alpha_0| \leqq 0.05$rad

e:端縁場を考慮，$|\alpha_0| \leqq 0.05$rad

4-2 ウィーンフィルター

ウィーンフィルターは特定の速度を持った荷電粒子のみを通す，電場と磁場を重ねあわせた速度フィルターである。本論文では次の2つの種類のウィーンフィルターについて考える。1つは均一電場と均一磁場を組み合わせたタイプ1のウィーンフィルター，もう1つは曲がりを持たせた電場と均一磁場を組み合わせることによってx，y両方向に方向収束性を実現させるタイプ2のウィーンフィルターである。イオン光学系は図4-5のようになる。

第2章で求めた計算結果をもとにウィーンフィルターを含むイオン光学系のマトリクスが計算された[11]。しかし，この計算では電場と磁場の端縁場を別々に計算している。つまりP_1からP_2およびP_3からP_4への変換で電場の端縁場と磁場の端縁場の2つのマトリクスが使われている。そこで近似の次数が3次から2次に低下するが重畳場の端縁場をより正確に計算するため，第3章で求めた計算結果を利用し，端縁場を1つのマトリクスにして計算した。ただし定数は

$$z_e = 0\,,\ I_{e2}^{\text{in}} = I_{e2}^{\text{out}} = -0.0121\,,\ I_{m2}^{\text{in}} = I_{m2}^{\text{out}} = -0.0103\,,\ I_{c2}^{\text{in}} = I_{c2}^{\text{out}} = -0.011 \tag{4-3}$$

イオンの条件は

$$|\alpha_0| \le 0.005\text{rad}\,,\ |\beta_0| \le 0.005\text{rad}\,,\ |\delta| \le 0.05\% \tag{4-4}$$

P_0でのスリット幅はx，y方向ともに0.001mとする。

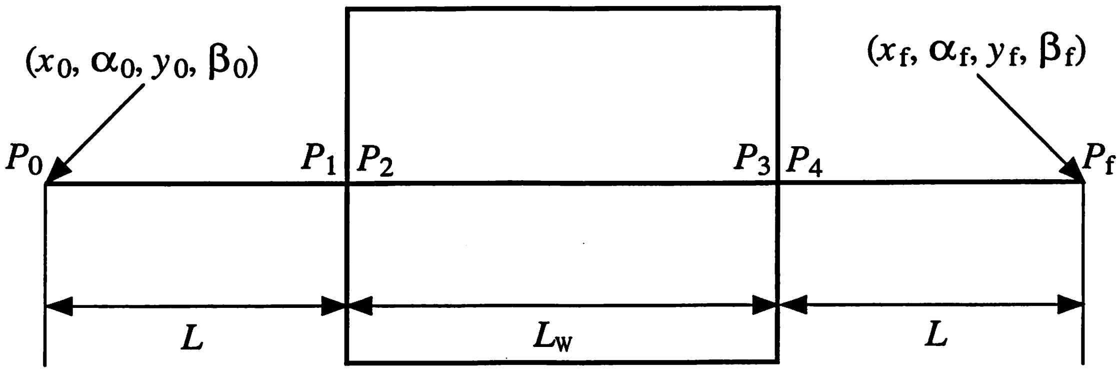
P_fにおけるx_f，y_fを

$$x_f = A_x x_0 + A_\alpha \alpha_0 + A_v \Delta v + A_{\alpha\alpha}\alpha_0^2 + A_{\alpha\delta}\alpha_0\delta + A_{\delta\delta}\delta^2 + A_{yy}y_0^2 + A_{y\beta}y_0\beta_0 + A_{\beta\beta}\beta_0^2 \tag{4-5}$$

$$y_f = A_y y_0 + A_\beta \beta_0 + A_{y\alpha} y_0\alpha_0 + A_{y\delta} y_0\delta + A_{\beta\alpha}\beta_0\alpha_0 + A_{\beta\delta}\beta_0\delta \tag{4-6}$$

とおくと係数は表4-2,3のようになる。

それぞれのタイプのイオン光学系が作る像を図4-6に示す。図から明らかにa(タイプ1)とb(タイプ2)では収束のしかたが異なる。よって用途に応じてウィーンフィルターのタイプを選択すればよい。



$P_0\ (x_0,\ \alpha_0,\ y_0,\ \beta_0)$

↓　入射側の自由空間

$P_1\ (x_1,\ \alpha_1,\ y_1,\ \beta_1)$

↓　入射側の端縁場

$P_2\ (x_2,\ \alpha_2,\ y_2,\ \beta_2)$

↓　ウィーンフィルター

$P_3\ (x_3,\ \alpha_3,\ y_3,\ \beta_3)$

↓　出射側の端縁場

$P_4\ (x_4,\ \alpha_4,\ y_4,\ \beta_4)$

↓　出射側の自由空間

$P_f\ (x_f,\ \alpha_f,\ y_f,\ \beta_f)$

図4-5：ウィーンフィルターのイオン光学系（L_W=1.0m，L=1.92L_W）

表4-2：タイプ1のウィーンフィルターの係数

	今回	文献[11]		今回	文献[11]
A_x	-1.034	-1.000	A_y	0.997	-1.050
A_α	-0.084	0.000	A_β	4.827	4.950
A_ν	2.085	2.094	$A_{y\alpha}$	4.95	4.98
$A_{\alpha\alpha}$	-26.12	-25.38	$A_{y\delta}$	-0.81	-0.82
$A_{\alpha\delta}$	8.58	8.42	$A_{\beta\alpha}$	13.60	13.60
$A_{\delta\delta}$	-0.90	-0.92	$A_{\beta\delta}$	-2.27	-2.32
A_{yy}	1.03	1.03			
$A_{y\beta}$	4.95	4.95			
$A_{\beta\beta}$	5.16	5.15			

表4-3：タイプ2のウィーンフィルターの係数

	今回	文献[11]		今回	文献[11]
A_x	-1.036	-1.000	A_y	-1.070	-1.002
A_α	-0.088	0.000	A_β	-0.174	0.006
A_ν	2.990	3.002	$A_{y\alpha}$	3.84	3.86
$A_{\alpha\alpha}$	-45.67	-43.13	$A_{y\delta}$	0.79	0.77
$A_{\alpha\delta}$	12.48	12.34	$A_{\beta\alpha}$	9.54	9.42
$A_{\delta\delta}$	-0.98	-1.01	$A_{\beta\delta}$	1.13	-10.52
A_{yy}	0.57	0.60			
$A_{y\beta}$	3.88	3.97			
$A_{\beta\beta}$	4.76	4.81			

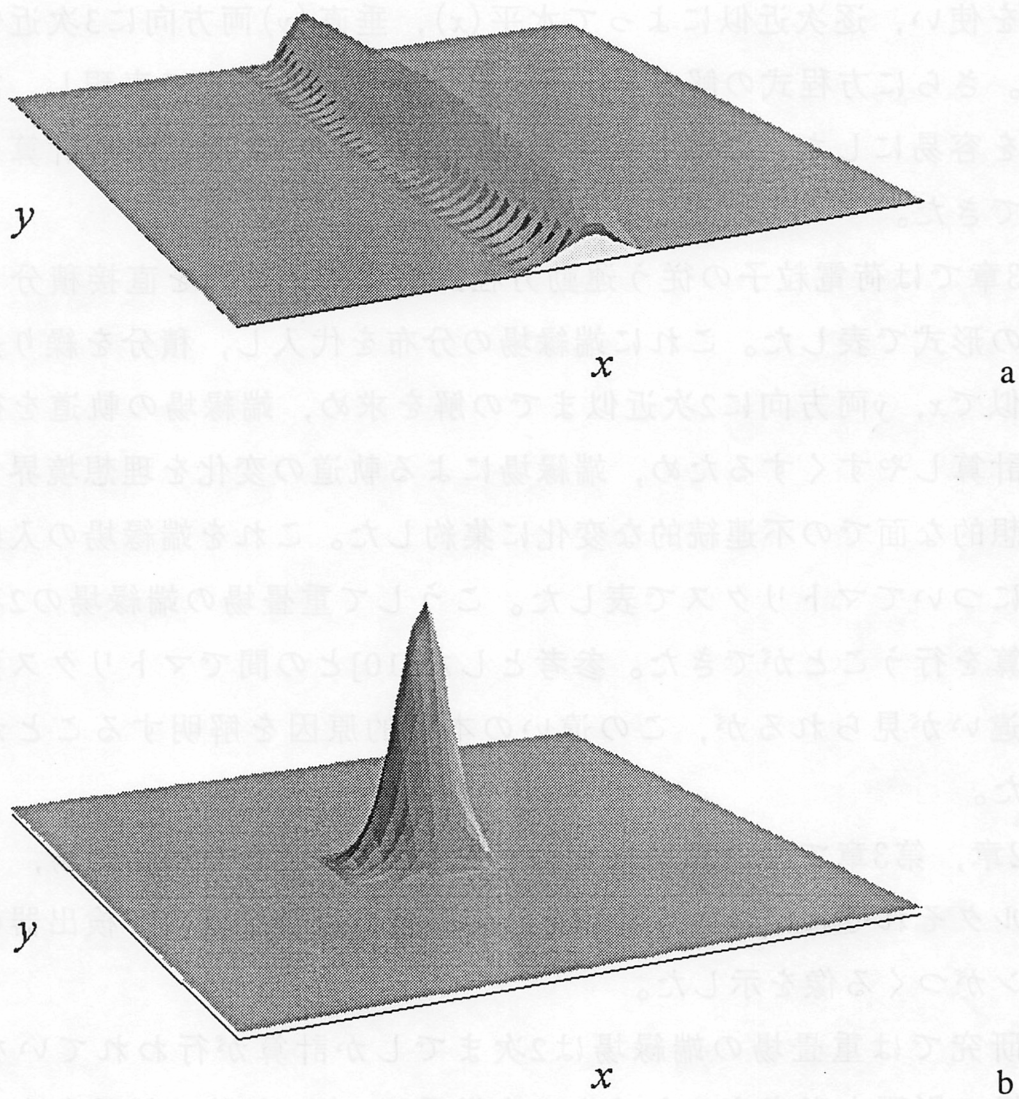


図4-6：ウィーンフィルターの作る像
（x軸，y軸の幅はともに0.02m）
a：タイプ1，b：タイプ2

第5章　まとめ

第2章では相対論的影響を考慮したエネルギー保存則とフェルマーの変分原理を出発点にして運動方程式を導き，それを係数比較法とラプラス変換法を使い，逐次近似によって水平(x)，垂直(y)両方向に3次近似まで解いた。さらに方程式の解をマトリクスと呼ばれる形式で表現し，計算することを容易にした。こうして重畳場の理想場の3次近似軌道計算を行うことができた。

第3章では荷電粒子の従う運動方程式を立て，これを直接積分して解を積分の形式で表した。これに端縁場の分布を代入し，積分を繰り返して逐次近似でx，y両方向に2次近似までの解を求め，端縁場の軌道を得た。さらに計算しやすくするため，端縁場による軌道の変化を理想境界と呼ばれる仮想的な面での不連続的な変化に集約した。これを端縁場の入射，出射双方についてマトリクスで表した。こうして重畳場の端縁場の2次近似軌道計算を行うことができた。参考とした[10]との間でマトリクス要素の一部に違いが見られるが，この違いの本質的原因を解明することができなかった。

第2章，第3章での計算結果を例示するため第4章で90度磁場，ウィーンフィルタそれぞれについて計算をして収差の係数を求め，検出器の位置にイオンがつくる像を示した。

本研究では重畳場の端縁場は2次までしか計算が行われていないため，端縁場の影響を考慮するとイオン光学系の3次の収差の係数を求めることはできない。したがって3次の収差の係数を計算するために重畳場の端縁場の3次計算をすることが今後の課題である。

一般に計算の次数を上げると微小な量(x, α, y, β, γ, δ)の組み合わせが増えることにより項数が増大する((2-57)～(2-68)参照)。例えば2次項ではx，yそれぞれ13個，8個だったのが3次では32個，24個になる。さらにそれぞれの項の係数もより複雑になる。端縁場の場合これよりは項数が少なくて済むが，場の積分に関係する問題がある。2次では(3-55)の程度であるが次数があがるとBやEを含む定積分の数が増加し，複雑となる。よって重畳

場の端縁場の3次項を計算するためには多数現れる積分を処理しなければならない。磁場あるいは電場単独の端縁場の3次計算はすでに水平方向について行われている[7-9]。

また第3章では磁場に直角方向に入射(出射)しているものとして計算している。しかし，イオンの中心軌道に対して磁場の境界を斜めにすることによって高性能を実現しているイオン光学系があるので，より一般的な斜め入射に対応した計算を行うことが必要である。

謝辞

この研究を遂行するにあたり，ご指導していただいた大阪大学理学部の松尾武清教授に深く感謝いたします。またイオン光学の計算および質量分析の基本的諸問題について議論し，ご指導いただいた桜井達先生，伊藤啓行先生，木村正広先生に深く感謝いたします。

参考文献

[1] T.Matsuo and H.Matsuda, *Int. J. Mass Spectrom. Ion Phys.*, **6**, 361(1971)

[2] T.Matsuo, H.Matsuda and H.Wollnik, *Nucl. Instrum. Methods*, **103**, 515(1972)

[3] T.Matsuo, *Nucl. Instrum. Methods*, **126**, 273(1975)

[4] H.Nakabushi, T.Sakurai and H.Matsuda, *Int. J. Mass Spectrom. Ion Phys.*, **52**, 319(1983)

[5] T.Matsuo, H.Matsuda, Y.Fujita and H.Wollnik, 質量分析, **24**, 19(1976)

[6] M.Toyoda, H.Hayashibara, T.Sakurai and T.Matsuo, *Int. J. Mass Spectrom. Ion Processes*, **146/147**, 195(1995)

[7] H.Matsuda and H.Wollnik, *Nucl. Instr. and Meth.*, **77**, 40(1970)

[8] H.Matsuda and H.Wollnik, *Nucl. Instr. and Meth.*, **77**, 283(1970)

[9] H.Matsuda, *Nucl. Instr. and Meth.*, **91**, 637(1971)

[10] H.Nakabushi, T.Sakurai and H.Matsuda, *Int. J. Mass Spectrom. Ion Phys.*, **55**, 291(1983/1984)

[11] T.Sakurai, M.Toyoda, H.Hayashibara and T.Matsuo, *Int. J. Mass Spectrom. Ion Processes*, **146/147**, 217(1995)

[12] 松田　久, 質量分析, **13**, 123(1965)

[13] 松田　久, 質量分析, **24**, 199(1976)

[14] F.A.White and G.M.Wood, *MASS SPECTROMETRY Applications in Science and Engineering*, John Wiley & Sons, New York(1986)